Algorithmique
TD Problèmes de flots dans les graphes

Michel Habib

I) Flot maximum dans un graphe

1. Faire tourner l'algorithme de Ford-Fulkerson de recherche d'un flot maximum sur un exemple.
2. Argumenter sur l'existence d'un unique flot maximal (la valeur du flot sur l'arc de retour).
3. Quels genres de problèmes peuvent être modélisés à l'aide des lois de Kirchhoff ? Donner des exemples d'applications réelles.
4. Le marquage arrière dans les chaînes améliorantes est-il toujours nécessaire ?
5. Même question quand on utilise un parcours en largeur pour obtenir la chaîne améliorante ?
6. Proposer une transformation du graphe pour y calculer plus facilement les chaînes améliorantes. Décrire le nouveau problème précisemment.
7. Analyse dans le plus mauvais cas de l'algorithme de Ford-Fulkerson (pour la variante plus courte chaîne améliorante).
8. Peut-on simplifier l'algorithme de Ford-Fulkerson si le graphe est planaire ?
9. Comment améliorer la complexité de cet algorithme ?
10. Montrer qu'il existe toujours une suite de chemins améliorants (sans arête orientée à l'envers) qui permet d'obtenir un flot maximal en partant du flot nul.
11. Que peut-on dire de la taille de cette suite ?
12. Sur quel graphe suffit-il de calculer les chaînes améliorantes ?
13. Faire la liste des algorithmes possibles pour le flot maximum en fonction des choix des chaînes améliorantes.
    Autrement dit, nous avons déjà vu 3 possibilités, peut-on en imaginer d'autres ?
14. Complexité des schémas algorithmiques précédents.
15. On suppose maintenant que chaque arc u, la capacité s'exprime par un intervalle $I(u) = [c_1, c_2]$. Il s'agit de savoir s'il existe un flot sur le graphe G tel que :
    $\forall u \in U$, $\phi(u) \in I(u)$.
16. Que faire lorsque les arêtes sont munies d'un coût et que l'on cherche un flot maximum de coût minimum.
17. Montrer que dans un graphe non orienté le nombre maximum de chaînes 2 à 2 disjointes au sens des sommets qui relient deux sommets a et b est égal au nombre minimum de sommets qu'il faut enlever au graphe afin de disconnecter a et b. (Remarque : nous avons démontré le cas 2 ci-dessus. G 2-connexe ssi G ne possède pas de point d'articulation).
18. Proposer une version du théorème min-max précédent pour l'arête connexité ainsi que pour la forte connexité.

II) Coupes

1. Montrer que la capacité d'une coupe est une fonction submodulaire, i.e. : $\forall S, T$ coupes d'un graphe G :
   $c(S \cup T) + c(S \cap T) \leqslant c(S) + c(T)$
2. En déduire que les coupes ont une structure de treillis. Que peut-on dire des coupes minimales.
3. Trouver un graphe ayant un nombre exponentiel de coupes. Même question avec coupes minimales.
4. Est-ce possible pour un graphe planaire ?

5. Etant donné un flot maximum, comment construire un coupe minimale qui contienne toutes les coupes minimales ?
6. Etant donné un flot maximum, comment construire un coupe minimale contenue dans toutes les coupes minimales ?
7. Ecrire un algorithme qui vérifie si un graphe admet une coupe minimale unique.

III) Flots et parité

On considère un réseau de transport $R = (X, U)$ dont les capacités sont entières.

1. Un flot entier est dit pair (resp. impair) si toutes ses valeurs sont paires (resp. impaires).
   Est-il vrai que :
   (a) si toutes les capacités sont paires, il existe un flot maximum pair.
   (b) si toutes les capacités sont impaires, il existe un flot maximum impair.
2. Est-il possible qu'il existe un flot maximum sur R qui ne soit pas à valeurs entières ?
3. Proposer un algorithme qui le transforme en un flot maximum entier.