Algorithmique de graphes : TD mariages

Michel Habib

11 janvier 2018

1 Couplage maximal dans un graphe biparti

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *couplage* est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que chaque sommet de V appartient à au plus une arête de M.

Ici, on suppose le graphe G biparti : $G = (X \cup Y, E)$, avec $E \subset X \times Y$.

Question 1: On dit que C est un couplage maximal s'il n'est inclus strictement dans aucun autre couplage. Donner un algorithme de construction d'un couplage maximal.

Question 2: On dit que C est un couplage maximum s'il n"existe pas de couplage de cardinalité supérieure. Tout couplage maximal est-il maximum ?

Question 3: Soit C un couplage. Un chemin C-alterné est un chemin de G qui alterne entre arêtes de C et arêtes de $E \setminus C$, et un chemin C-augmentant est un chemin C-alterné qui commence et finit par des sommets insaturés, c'est à dire des sommets qui ne sont extrémité d'aucune arête de C.
Montrer qu'il existe un chemin C-augmentant si et seulement si C n'est pas maximum.

Question 4: On appelle *ensemble dominant* de G, un ensemble de sommets S tel que toute arête dans E est incidente à au moins un sommet de S. Soit S un tel ensemble et C un couplage. Comparer les tailles de C et S.

Question 5: On considère l'algorithme suivant qui construit deux ensembles $S \subseteq X$ et $T \subseteq Y$. U désigne l'ensemble des sommets C-insaturés de X. Au départ, tous les sommets de U sont non marqués.

début
$S = U$; $T = \emptyset$
tant qu'il y a dans S des sommets non marqués *faire*
Choisir un sommet $x \in S$ non marqué.
Pour chaque voisin y de x tel que $y \notin T$ et $xy \notin C$ *faire*
Si y est insaturé, arrêter en répondant "C c'est pas maximum".
sinon soit $w \in X$ tel que $yw \in C$.
$T \leftarrow T \cup \{y\}$.
$S \leftarrow S \cup \{w\}$.
Marquer x.
Arrêter en répondant "$T \cup (X \setminus S)$ est un ensemble dominant."
fin

Montrer que l'algorithme termine toujours, et qu'il est produit un ensemble dominant. Pour ce faire, il suffit d'extraire les invariants principaux de l'algorithme.

Question 6: Dans le cas où l'algorithme retourne une couverture, comparer la taille de cette couverture à celle de C. Que peut-on en déduire sur C ?

Question 7: Comment modifier l'algorithme pour construire un couplage maximum ?

Question 8: Au final on a réussi à démontrer le résultat min-max suivant.

Théorème 1 (Konig 1931)

$$\max\{|C|,\, C \textit{ couplage de } G\} = \min\{|X|,\, X \textit{ ensemble dominant de } G\}$$

Montrer comment on aurait pu déduire ce théorème du théorème max du flot = min d'une coupe.

2 Mariages Stables

On suppose ici que l'on à n hommes $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ et n femmes $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. À chaque personne est associé un ordre de préférence total sur les personnes du sexe opposé.

Un couplage homme femme est dit stable, s'il ne contient pas deux couples (h_1, f_1), (h_2, f_2) tels que

— h_1 préfère f_2 à f_1,

— f_2 préfère h_1 à h_2.

En d'autres termes, un couplage est stable s'il n'existe pas un homme et une femme qui préfèrent être ensemble plutôt qu'avec leurs conjoints respectifs.

Le but de l'exercice est de montrer qu'un couplage maximal stable existe toujours quelles que soient les listes de préférence.

Question 1: Dans cette section, on va faire une première preuve de ce résultat en fournissant un algorithme. L'algorithme est basé sur le principe "homme propose - femme dispose".

début

Répeter

Chaque homme demande en mariage la femme la plus haute sur sa liste
qui ne l'a pas déjà rejeté.
Toute femme qui reçoit $k \geq 2$ demandes en mariage rejette les demandes
émanant des $k-1$ hommes les plus bas sur sa liste de préférence.
Jusqu'à ce que chaque femme recoive exactement une demande.
La femme se marie à l'homme qui l'a demandé.
fin

Quel est le mariage produit par l'algorithme suivant ?

Hommes : $\{x, y, z, w\}$	Femmes :$\{a, b, c, d\}$
$x : a > b > c > d$	$a : z > x > y > w$
$y : a > c > b > d$	$b : y > w > x > z$
$z : c > d > a > b$	$c : w > x > y > z$
$w : c > b > a > d$	$d : x > y > z > w$

Question 2: Montrer que cet algorithme termine toujours et produit un mariage stable.

Question 3: Montrer que cet algorithme fournit un mariage C qui est optimal du point de vue des hommes, c'est à dire que si C' est un autre mariage stable, aucun homme n'est marié dans C' à une femme qu'il préfère à son épouse dans C.
Réciproquement, montrer que ce mariage stable est le plus mauvais du point de vue des femmes.

Question 4: On ne suppose plus qu'il qu'il y a autant d'hommes que de femmes. Définir une notion de stabilité (on supposera que tout le monde préfère être marié plutôt que célibataire). Proposer un algorithme de mariage. Quelles sont les propriétés de cet algorithme ?

Question 5: Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que l'ensemble des personnes qui restent célibataires est le même dans tous les mariages stables.

Question 6: Si une personne reste célibataire dans un mariage stable, aurait-il pu en aller autrement si elle avait une liste de préférence différente ?