M1 - T.D. Logique 7

Unification – Résolution

EXERCICE 1 On se place dans le cadre d'une algèbre de termes où x, y, z, u, v, w sont des symboles de variables, a un symbole de constante, f, g, p des symboles d'opérateurs ou fonctions d'arités respectives 1, 2 et 3. Pour chacun des couples de termes (t_1, t_2) suivants, examiner si $t_2 = \sigma(t_1)$, pour une substitution σ, et si t_1 et t_2 sont unifiables.

1) $t_1 : p(x,\ f(y),\ g(f(u),\ w))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

2) $t_1 : p(x,\ f(x),\ g(f(y),\ x))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

3) $t_1 : p(x,\ f(x),\ g(f(x),\ x))$ et $t_2 : p(z,\ f(f(a)),\ g(f(g(a,z)),\ v))$

Peut-on trouver deux termes t_1 et t_2 tels que $t_1 = \sigma(t_2)$, mais t_1 et t_2 ne sont pas unifiables ? $\diamondsuit$

EXERCICE 2 Dans chacun des cas suivants, unifiez les termes $t_j,\ j \in \{1, 2, 3\}$

1) $t_1 : p(x',\ y',\ z')$
$t_2 : p(f(g(x, y)),\ g(v, w),\ y)$
$t_3 : p(f(z),\ x,\ f(x))$
$\vdots$

2) $t_1 : p(x,\ f(y),\ f(f(z)))$
$t_2 : p(f(z),\ f(f(x)),\ y)$
$t_3 : p(f(f(y)),\ z,\ f(x))$ $\diamondsuit$

EXERCICE 3 Unifier $t = k(f(c, g(x_4, x_5)), f(c, g(x_5, x_4)), k(x_5, x_4, x_2))$ et $t' = k(x_2, x_2, x_6)$. $\diamondsuit$

EXERCICE 4 Trouver des Skolemisations de $F = (\forall x R(x)) \vee (\exists y R'(y))$. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 Trouver des Skolemisations de

$$F = (\forall x \exists y R(x, y)) \vee \neg(\exists x \forall y R'(x, y)).$$ $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Considérons l'énoncé suivant, tiré de la "Logique sans peine" de Lewis CAROLL.

- Les animaux sont toujours mortellement offensés si je ne fais pas attention à eux.
- Les seuls animaux qui m'appartiennent se trouvent dans ce pré.
- Aucun animal ne peut résoudre une devinette s'il n'a pas reçu une formation convenable dans une école.
- Quand un animal est mortellement offensé, il se met toujours à courir en tous sens et à hurler.
- Je ne fais jamais attention à un animal qui ne m'appartient pas.
- Aucun animal qui a reçu dans une école une formation convenable ne se met jamais à courir en tous sens et à hurler.
- Aucun des animaux qui se trouvent dans ce pré n'est un raton laveur.

1. Formaliser ces déclarations à l'aide de clauses utilisant les propositions atomiques suivantes:

at : je fais attention à l'animal considéré
mo : l'animal considéré est mortellement offensé
pr : l'animal considéré est dans le pré
ap : l'animal considéré m'appartient
fc : l'animal considéré a reçu une formation convenable
rd : l'animal considéré peut résoudre une devinette
ch : l'animal considéré se met à courir en tous sens et à hurler
rl : l'animal considéré est un raton laveur

2. Utilisant la méthode de résolution déduire des formules précédentes que les ratons laveurs ne peuvent résoudre de devinettes. $\diamondsuit$

EXERCICE 7 Trois individus accusés d'un crime font les témoignages suivants :

- Damien : "Laure est coupable et Marie est innocente"

T.S.V.P.

- Laure : "Si Damien est coupable alors Marie l'est aussi"
- Marie : "Je suis innocente mais au moins l'un des deux autres est coupable"

1. Représenter les témoignages par un ensemble de clauses en logique des propositions.
2. Montrer par la méthode de résolution que si tous disent vrai alors Laure est la seule coupable.
3. Montrer par la méthode de résolution que si les innocents disent vrai et seulement eux, alors Damien et Marie sont coupables et Laure est innocente. $\diamondsuit$

EXERCICE 8 Considérons l'énoncé suivant : *"Si l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions, la grève ne se terminera pas, à moins qu'elle dure depuis plus d'une année et que le président soit démis de ses fonctions. Sachant que l'assemblée refuse d'agir, la grève qui vient de commencer (c'est-à-dire qui dure depuis moins d'un an) se terminera t-elle ?"*

1. Formaliser les informations données dans le système formel d'Hilbert en faisant appel uniquement aux propositions suivantes :

p : l'assemblée ne prend pas de nouvelles dispositions

l : la grève se terminera

a : la grève dure depuis plus d'une année

d : le président est démis de ses fonctions

2. Montrer par la méthode de résolution que la grève ne se terminera pas. $\diamondsuit$

EXERCICE 9 Pour justifier la composition de son équipe de Football, l'entraîneur tient le raisonnement suivant : *"Pour que l'attaque soit dangereuse, il suffit qu'Eric et Henri jouent le match. Si Clément et Olivier jouent le match, alors le milieu sera fort et la défense sera solide. En fait, nous perdrons le match seulement si le milieu est faible ou l'attaque inoffensive. Comme Eric, Henri, Clément et Olivier vont jouer le match, l'équipe va l'emporter ou au pire faire match nul."*

1. Modéliser ce raisonnement en logique des propositions. On prendra soin d'utiliser les notations suivantes:

e : Eric joue le match

h : Henri joue le match

c : Clément joue le match

o : Olivier joue le match

a : L'attaque sera dangereuse

m : Le milieu sera fort

d : La défense sera solide

p : L'équipe va perdre

2. Montrer par la méthode de résolution la validité du raisonnement mené par l'entraîneur. $\diamondsuit$

EXERCICE 10 On considère le programme formé des deux clauses suivantes :

$C_1 : \quad \forall x \forall y \big(R(f(x), y) \longleftarrow P(x, y)\big) \quad , \quad C_2 : \quad \forall x \forall y \big(P(f(x), y) \longleftarrow R(x, y)\big)$

Montrer par résolution que $\{C_1, C_2\} \vdash \forall x \forall y \big(R(f(f(x)), y) \longleftarrow R(x, y)\big)$ et que $\{C_1, C_2\} \vdash \forall x \forall y \big(P(f(f(x)), y) \longleftarrow P(x, y)\big)$. $\diamondsuit$

EXERCICE 11 Montrer par résolution que :

1. $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$.
2. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$.
3. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall z R(z, z)$ $\diamondsuit$

Dans la suite on omettra les quantificateurs universels dans les clauses.

Exercice 12 Montrer par résolution qu'une relation binaire irréflexive et transitive est asymétrique ; il faut montrer que $\{C_1, C_2\} \vdash C_3$ où
C_1 : $\neg R(x, x)$,
C_2 : $R(x, z) \longleftarrow R(x, y), R(y, z)$ et
C_3 : $\neg(R(x, y) \wedge R(y, x))$. ♢

Exercice 13 On considère le programme formé des trois clauses suivantes :
C_1 : $R(a, b)$
C_2 : $Q(x, x)$,
C_3 : $Q(x, z) \longleftarrow R(x, y), Q(y, z)$.
Calculer les réponses à la requête $\longleftarrow Q(x, b)$ obtenues par résolution (on construira 2 réfutations linéaires). ♢

Exercice 14 On considère un langage comportant les constantes c, d, les prédicats unaires E, I, S et le prédicat binaire R. Construire une réfutation linéaire de l'ensemble de clauses :
C_1 : $E(c)$,
C_2 : $I(d)$,
C_3 : $S(d)$,
C_4 : $\neg I(y) \vee R(c, y)$,
C_5 : $\neg E(x) \vee \neg S(y) \vee \neg R(x, y)$. ♢

Exercice 15 On considère le programme formé des quatre clauses suivantes :
C_1 : $R(a, b)$,
C_2 : $R(c, b)$,
C_3 : $R(x, z) \longleftarrow R(x, y), R(y, z)$,
C_4 : $R(x, y) \longleftarrow R(y, x)$.

1. Calculer les réponses à la requête $\longleftarrow R(x, c)$ obtenues par résolution.
2. Que donne la stratégie PROLOG pour la même requête ? ♢