MI018 LOGIQUE - Examen 17 décembre 2008

cette partie compte pour 70% de la note

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée

Documents, Téléphones et Calculettes Interdits

Exercice 1 (6pts) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul et $bin(n)$ sa représentation binaire. Construire une machine de Turing qui, si on lui donne $\#bin(n)*$ en entrée avec la tête positionnée sur #, va terminer avec $\#bin(n/2)*1$ et sa tête positionnée sur le dernier 1 lorsque n est pair, et va boucler lorsque n est impair. $\diamondsuit$

Exercice 2 (17pts = 4+4+2+3+4) On considère les formules

$$F_1 = P(a)\ ,\ F_2 = \forall x\,(P(x) \supset Q(x))\ ,\ F_3 = \forall x\,(P(x) \supset P(s^2(x)))\ .$$

On rappelle que $s^2(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(x))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1. 2. et 3. seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n+1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
3. Trouver une interprétation I qui soit modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$ et telle que $P_I \neq Q_I$.
4. Donner une forme clausale de chacune des trois formules F_1, F_2, F_3.
5. Prouver par résolution que :

$$\{F_1, F_2, F_3\} \vdash Q(s^4(a))$$

$\diamondsuit$

Exercice 3 (3pts) Ecrire une formule logique F_2 telle que : si $I \models F_2$, alors il y a au moins deux éléments distincts dans le domaine E_I de l'interprétation I (on supposera donné un prédicat d'égalité =). $\diamondsuit$

Exercice 4 (15 pts = 8+7) 1. Ecrire des formules du calcul des prédicats traduisant les assertions suivantes :

F_1 : Tous les étudiants sont intelligents,
F_2 : Certains étudiants travaillent,
F_3 : Tous ceux qui sont intelligents et qui travaillent réussissent,
F_4 : Certains étudiants réussissent.
Indication : introduire les prédicats unaires $E(.), I(.), T(.), R(.)$.

2. Montrer par résolution (réfutation) que $\{F_1, F_2, F_3\} \vdash F_4$. $\diamondsuit$

Exercice 5 (19 pts = 10+3+6) On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x\ (Cube(x) \vee Dodec(x))$
F_2: $\forall x \forall y\ (Larger(x,y) \supset (Large(x) \vee Small(y)))$
F_3: $\forall x \forall y \forall z\ (Between(x,z,y) \vee \neg Between(x,y,z))$
F_4: $\neg \exists x \exists y\ (Larger(x,y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$
F_5: $\forall x \forall y \forall z ((BackOf(x,z) \wedge Between(y,x,z)) \supset BackOf(x,y))$
F_6: $\forall x \forall y \forall z\ ((Larger(x,y) \wedge \neg Larger(x,y)) \supset \neg Between(x,z,y))$
F_7: $\forall x \forall y \forall z\ (Between(x,z,y) \vee \neg Between(x,z,y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.
2. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ?
3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. $\diamondsuit$

1.

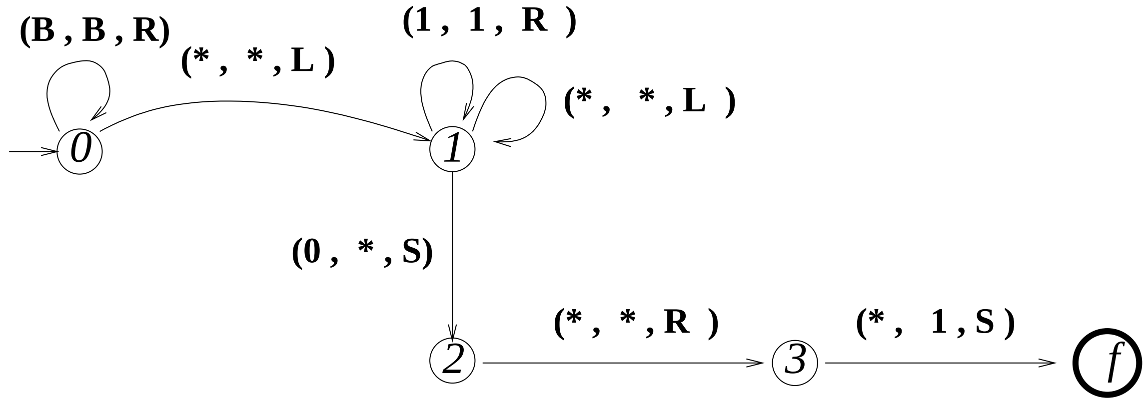

Figure 1

2. 1. 1pt N O N N

2. 1pt N O O N

3. 1pt P vrai ssi n pair et Q vrai ssi n pair ou $n = 3$.

4. 1pt $P(a)$, $F_2 = \forall x\,(\neg P(x) \vee Q(x))$, $F_3 = \forall x\,(\neg P(x) \vee P(s^2(x)))$.

5. 2pts On réfute $\{F_1, F_2, F_3, F_4 = \neg Q(s^4(a))\}$

De F_2 et F_4 par résolution : $\neg P(s^4(a))$,

avec F_3 par résolution : $\neg P(s^2(a))$

avec F_3 par résolution : $\neg P(a)$, et avec F_1 la clause vide.

3. $F_2 = \exists y \exists x (x \neq y)$

4.

F_1 : $\forall x (E(x) \supset I(x))$

F_2 : $\exists x (E(x) \wedge T(x))$

F_3 : $\forall x(\,(I(x) \wedge T(x)) \supset R(x)\,)$

F_4 : $\exists x (E(x) \wedge R(x))$

2. forme clausale (après skolemisation) F_2 : $\exists x (E(x) \wedge T(x))$ donne $\{E(a)\,,\, T(a)\}$, et $\neg F_4$: $\forall x (\neg E(x) \vee \neg R(x))$

de F_1 et $E(a)$ avec $\sigma(x) = a$ on déduit $I(a)$

de F_1 et $I(a)$ avec $\sigma(x) = a$ on déduit $\neg T(a) \vee R(a)$

de $\neg T(a) \vee R(a)$ et $T(a)$ on déduit $R(a)$

de $R(a)$ et $\neg F_4$ avec $\sigma(x) = a$ on déduit $\neg E(a)$

de $\neg E(a)$ et $E(a)$ on déduit la clause vide

5. 1pt par formule (sauf F_5 : 2pts)

(i) tautologies : F_6, F_7

(ii) formules T-valides : F_4, F_2, F_3,

pour falsifier F_2 et F_4 : prendre l'interprétation de $Larger(x, y)$ comme un ordre large (i.e. x est plus grand ou égal à y.

pour falsifier F_3 : prendre l'interprétation de $Between(x, y, z)$ par exemple $x < y$

(iii) formules non T-valides : F_1, F_5

pour falsifier F_1 : construire un monde avec un tétraèdre.

pour falsifier F_5 :prendre x y z comme dans la figure 2

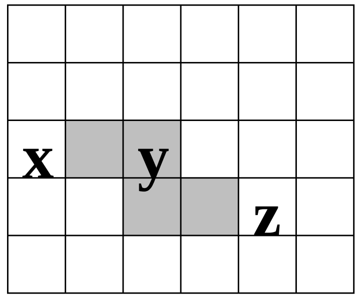

Figure 2 Contrexemple montrant que F_5 n'est pas T-valide