EXAMEN LOGIQUE - 14 Janvier 2005

les exercices sont indépendants

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée

EXERCICE 1 (Question de cours) Montrer que l'ensemble *Taut* des formules du calcul des prédicats qui sont valides pour toute interprétation (i.e. les tautologies du calcul des prédicats) n'est pas décidable. Quelle méthode avez-vous employée pour votre preuve ? ♢

EXERCICE 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul et $bin(n)$ sa représentation binaire. Construire une machine de Turing qui, si on lui donne $\#bin(n)*$ en entrée avec la tête positionnée sur $\#$, va terminer avec $\#bin(n/2)*1$ et sa tête positionnée sur le dernier 1 lorsque n est pair, et va boucler lorsque n est impair. ♢

EXERCICE 3 On considère les formules

$F_1 = Q(a)$, $F_2 = \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$, $F_3 = \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$, $F_4 = \forall x\,(P(x) \supset P(s^2(x)))$.

On rappelle que $s^2(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(x))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1. 2. et 3. seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?
2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?
3. Trouver une interprétation I qui soit modèle de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$. ♢

EXERCICE 4 Soit F la formule $(\exists x\; R(x, y, z)) \wedge \forall z \forall y\; R(x, y, z)$.

1. $f(x, z)$ est-il substituable à x ?
2. $g(y)$ est-il substituable à z ?
3. Trouver deux formules prénexes équivalentes à F. ♢

EXERCICE 5 On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x\; (Cube(x) \vee Tet(x) \vee Dodec(x))$

F_2: $\forall x \forall y\; (Larger(x, y) \supset (Large(x) \vee Small(y)))$

F_3: $\forall x \forall y\; (Larger(x, y) \vee \neg Larger(x, y))$

F_4: $\neg \exists x \exists y\; (Larger(x, y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$

F_5: $\forall x \forall y \forall z((BackOf(x, z) \wedge Between(y, x, z)) \supset BackOf(x, y))$

F_6: $\forall x \forall y \forall z\; ((Larger(x, y) \wedge \neg Larger(x, y)) \supset \neg Between(x, z, y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.
2. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ?
3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. ♢

note finale de cette partie = (note/30) * 10

1.
4pts Voir cours

2. 3pts Avec les notations du logiciel Turing's World :

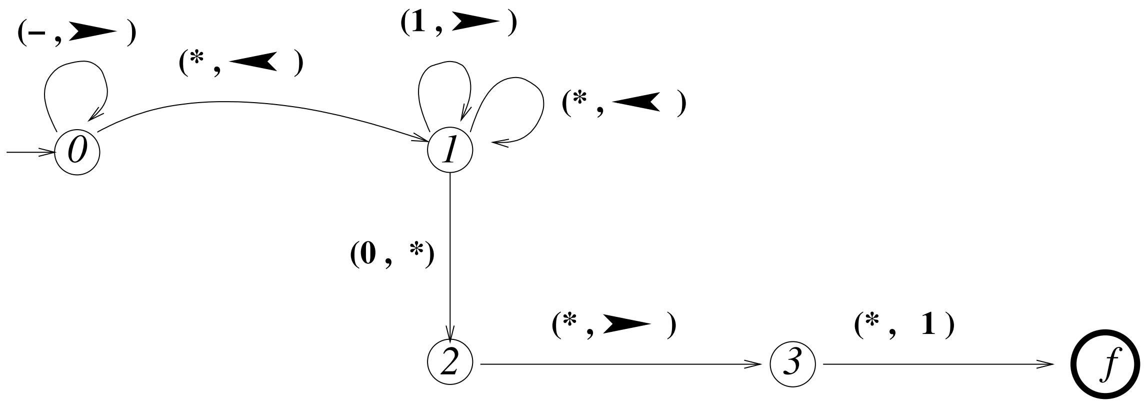

Figure 1

3. 1. 4pt N N O N
2. 4pt O N N N
3. 4pts $Q_I(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. $P_I(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 0$

4. 1. 1pt non (capture de la variable z dans $\forall z \forall y\ R(x, y, z)$).
2. 1pt oui Remarquer qu on ne substitue que les occurences libres, donc on ne substitue que dans $(\exists x\ R(x, y, z))$.
3. 2pts $(\exists x' \forall z \forall y\ (R(x', y, z)) \wedge R(x, y, z)\ )$ et $(\forall z \exists x' \forall y\ (R(x', y, z)) \wedge R(x, y, z)\ )$

5. 1pt par formule (sauf F_5 : 2pts)
(i) tautologies : F_3, F_6
(ii) formules T-valides : F_1, F_4, F_2,
pour falsifier F_1 : construire un univers comprenant par exemple des sphères (avec un prédicat sphere(x)), ou bien prendre comme interprétation $\mathbb{N}$ avec $Cube_I(x)$, $Tet_I(x)$, $Dodec_I(x)$ qui sont vrais ssi x est pair.
pour falsifier F_2 et F_4 : prendre l'interprétation de $Larger(x, y)$ comme un ordre large (i.e. x est plus grand ou égal à y.
(iii) formules non T-valides : F_5 prendre x y z comme dans la figure 2

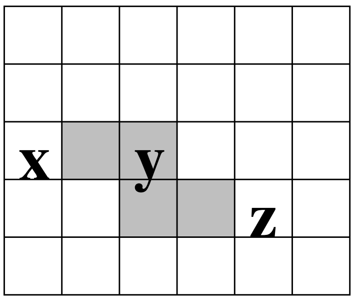

Figure 2 Contrexemple montrant que F_5 n'est pas T-valide