Examen LOGIQUE - 20 Janvier 2006

les exercices sont indépendants
DOCUMENTS et calculettes interdits

Téléphones éteints et rangés dans vos sacs

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée

Vous pouvez rédiger l'exercice 1 sur l'énoncé

On rapelle les règles du calcul des séquents

- utilisation d'une hypothèse : $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash F$
- augmentation des hypothèses : si $G \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \cup \{G\} \vdash F$
- règle de détachement (ou modus ponens) : si $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$ et si $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$
- règle de synthèse (ou retrait d'une hypothèse) : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$
- règle de la double négation : $\mathcal{F} \vdash F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\neg F$
- règle du raisonnement par l'absurde : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ et $\mathcal{F}, F \vdash \neg F'$, alors $\mathcal{F} \vdash \neg F$.
- Si $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ *et* si t est substituable à x dans F, alors : $\mathcal{F} \vdash F[x := t]$ (règle d'instantiation).
- Si $\mathcal{F} \vdash F$ et si x n'est pas libre dans $\mathcal{F}$, alors : $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ (règle de généralisation universelle).
- $\mathcal{F} \vdash \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F$ (définition de $\exists$).

On pourra utiliser aussi la règle suivante, démontrée en cours :

- Si $F \vdash G$ et si x n'est pas libre dans G alors $\exists x F \vdash G$ (règle de généralisation existentielle).

Exercice 1 1. Soit Q un prédicat binaire. Donner le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction suivante, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire.

0)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall y\, Q(x,y)$	hypothèse
1)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash Q(x,y)$	( )
2)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall x\, \neg Q(x,y)$	( )
3)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \neg Q(x,y)$	( )
4)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \neg\forall x\, \neg Q(x,y)$	( )
5)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \exists x\, Q(x,y)$	( )
6)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	( )
7)	$\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	( )

Vous pouvez rédiger les réponses sur l'énoncé si vous le souhaitez.

2. Enoncez (sans utiliser de séquent) le théorème démontré à la question 1. Enoncez la réciproque de ce théorème. Donnez-en une preuve si elle est vraie et un contre-exemple prouvant qu'elle est fausse sinon. ◇

Exercice 2 Soit $F = (\exists x \forall y R(x,y,z)) \supset (\exists x \exists z Q(x,z))$.

1. Donner une forme prénexe de F. Donner une autre forme prénexe de la même formule ?
2. Skolemiser les formules obtenues à la question 1.
3. Dans F, $f(a)$ est-il substituable à z ? $f(x)$ est-il substituable à z ? $f(z)$ est-il substituable à z ? Donner le résultat de la substitution si c'est substituable et la raison si ce n'est pas substituable. ◇

Exercice 3 On se place dans le calcul des prédicats, et on rappelle que les formules sont définies inductivement comme suit (T désigne l'ensemble des termes formé à partir des symboles de fonction de F et des variables de X) :

(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables libres dans une formule. On notera $L(p)$ l'ensemble des variables libres dans la formule p et $V(t)$ l'ensemble des variables figurant dans le terme t. ♢

Exercice 4 Soient $F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1, G$ des formules. Le théorème de déduction peut s'énoncer

$$\forall n > 0 \quad (F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow ((F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$$

Démontrer ce théorème par induction sur n. ♢

Exercice 5 On considère les formules suivantes :
F_1: $\forall x\ (Cube(x) \vee Dodec(x))$
F_2: $\forall x \forall y\ (Larger(x,y) \supset (Large(x) \vee Small(y)))$
F_3: $\forall x \forall y\ (Smaller(x,y) \vee \neg Smaller(x,y))$
F_4: $\neg \exists x \exists y\ (Larger(x,y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$
F_5: $\forall x \forall y \forall z ((BackOf(x,z) \wedge Between(y,x,z)) \supset BackOf(x,y))$
F_6: $\forall x \forall y \forall z\ ((Larger(x,y) \wedge \neg Larger(x,y)) \supset \neg Between(x,z,y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ?

3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. ♢

Exercice 6 On considère le programme formé des trois clauses suivantes :
C_1 : $\forall x \forall y \big(R(f(x),y) \longleftarrow P(x,y)\big)$
C_2 : $\forall x \forall y \big(P(f(x),y) \longleftarrow R(x,y)\big)$
C_3 : $R(a,b) \longleftarrow$

Montrer par résolution que $\{C_1, C_2, C_3\} \vdash R(f(f(a)),b)$ et que $\{C_1, C_2, C_3\} \vdash P(f(a),b)$. ♢

Exercice 7 On considère les formules
$F_1 = Q(a)$, $F_2 = \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$, $F_3 = \exists x\, \neg(P(x) \wedge Q(x))$, $F_4 = \forall x\, (P(x) \supset P(s^3(x)))$.

On rappelle que $s^3(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(s(x)))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1. 2. et 3. seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de F_4 ? de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$?

3. Trouver deux interprétations I qui soient modèles de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$. ♢

Exercice 8 Un professeur de langage C a donné un programme à faire en TME à ses étudiants. Il a écrit une solution correcte et va corriger le TME en comparant la réponse des programmes des étudiants à la réponse donnée par son programme. Pensez-vous que ce soit une bonne méthode de correction ? Justifiez votre réponse. ♢

Exercice 9 La fonction $(x,y) \mapsto x \times y + x^y$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ est-elle récursive ? ♢

1.

0)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall y\, Q(x,y)$	hypothèse
1)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash Q(x,y)$	instanciation
2)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \forall x\, \neg Q(x,y)$	hypothèse
3)	$\forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,y) \vdash \neg Q(x,y)$	instanciation
4)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \neg\forall x\, \neg Q(x,y)$	absurde
5)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \exists x\, Q(x,y)$	définition de $\exists$
6)	$\forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	généralisation universelle car y non libre dans $\forall y\, Q(x,y)$
7)	$\exists x\, \forall y\, Q(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$	généralisation existentielle car x non libre dans $\forall y\, \exists x Q(x,y)\square$

2. Le théorème est : $\exists x\ \forall y\ Q(x,y) \supset \forall y\ \exists x\ Q(x,y)$. Sa réciproque $\forall y\ \exists x\ Q(x,y) \supset \exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est fausse : sur $\mathbb{N}$, si $Q(x,y)$ ssi $x \geq y$, $\forall y\ \exists x\ Q(x,y)$ est vrai, alors que $\exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est faux, donc l'implication $\forall y\ \exists x\ Q(x,y) \supset \exists x\ \forall y\ Q(x,y)$ est fausse.

2. 1. forme prénexe1 $\exists x'\exists z'\forall x\exists y\big(R(x,y,z) \supset Q(x',z')\big)$ et
forme prénexe2 $(\forall x\exists y\exists x'\exists z'\big(R(x,y,z) \supset Q(x',z')\big)$ (entre autres, ...)..
2. $(\forall x\big(R(x,f(x),z) \supset Q(a,b)$ et $(\forall x\big(R(x,g(x),z) \supset Q(f(x),h(x))\big)$
3.$f(a)$ est-il substituable à z ? oui $F[z := a] = (\exists x\forall y R(x,y,a)) \supset (\exists x\exists z Q(x,z))$.
$f(x)$ est-il substituable à z ? non capture de la variable x
$f(z)$ est-il substituable à z ? oui $F[z := f(z)] = (\exists x\forall y R(x,y,f(z)) \supset (\exists x\exists z Q(x,z))$.

3. Soit $V(t)$ l'ensemble des variables figurant dans le terme t (vu en cours).

Base : si $p = R(t_1,\dots,t_n)$, alors $L(p) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$,

$$\begin{aligned} \text{Induction : } L(\neg p) &= L(p) \\ L(p * q) &= \Big(L(p)\Big) \cup \Big(L(q)\Big) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\} \\ L(\forall x p) &= L(\exists x p) = L(p) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

4. Base : $n = 1$, évident.
Induction : remarquons que $(F \supset G) \iff (\neg F \vee G)$ et supposons $(F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff (F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1 \supset G)$.
Par la remarque,
$(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff (\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots)))$;
par l'hypothèse d'induction pour $n-1$
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff \neg F_n \vee ((F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$;
par la remarque :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff \neg F_n \vee (\neg(F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G)$;
par l'associativité de $\vee$:
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff (\neg F_n \vee \neg(F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1)) \vee G$;
par les lois de Morgan :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff \neg(F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G$;
par la remarque :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \iff (F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G$

5. 1pt par formule (sauf F_5 : 2pts)

(i) tautologies : F_3, F_6

(ii) formules T-valides : F_4, F_2,

pour falsifier F_2 et F_4 : prendre l'interprétation de $Larger(x, y)$ comme un ordre large (i.e. x est plus grand ou égal à y.

(iii) formules non T-valides : F_1, F_5

pour falsifier F_1 : construire un monde avec un tétraèdre.

pour falsifier F_5 :prendre x y z comme dans la figure 1

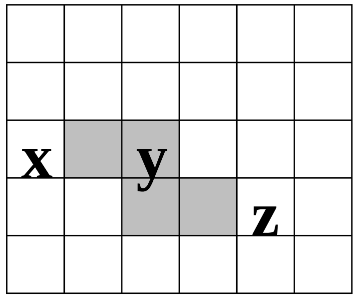

Figure 1 Contrexemple montrant que F_5 n'est pas T-valide

6. de $C_2, C_3, \neg P(f(a), b)$ on déduit la clause vide puis de $C_1, \neg R(f(f(a)), b)$ on déduit la clause vide.

7. 1. 2pt N N O N

2. 2pt O N O O

3. 4pts $Q_I(n)$ toujours vrai et $P_I(n)$ toujours faux

4pts $P_I(n)$ vrai si et seulement si 3 divise n et $Q_I(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$ ou 3 ne divise pas n

8. Non car on ne peut pas décider si 2 programmes C donnent le même résultat.

9. oui (comme composée de trois fonctions récursives, somme produit et exponentiation).