EXAMEN LOGIQUE - Vendredi 9 Septembre 2005

les exercices sont indépendants

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée

EXERCICE 1 On représente les entiers en notation unaire comme suit : étant donné un nombre n sa représentation unaire $un(n)$ est donnée par $\ldots BBB\underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ fois}}BBB\ldots$.

Construire une machine de Turing qui réalise un additioneur pour cette représentation : étant donné la configuration $\#\underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ fois}}B\underbrace{11\ldots1}_{m+1 \text{ fois}}*$ sur la bande, la machine met $\#\ \underbrace{11\ldots1}_{n+m+1 \text{ fois}}\ *$ sur la bande puis s'arrête. ♢

EXERCICE 2 Soit F la formule $(\exists y R(x,y)) \supset \forall x \exists z R(x,z)$.

1. $f(y)$ est-il substituable à x ?
2. $g(x,z)$ est-il substituable à y ?
3. $f(z)$ est-il substituable à x ?

Dans les cas où le terme est substituable, faire la substitution et donner le résultat.

4. Trouver deux formules prénexes équivalentes à F. ♢

EXERCICE 3 On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x \forall y(BackOf(x,y) \supset FrontOf(y,x))$
F_2: $\forall x \forall y((Small(x) \wedge Large(y) \wedge BackOf(x,y)) \supset Dodec(x))$
F_3: $\forall x \forall y((Tet(x) \wedge Tet(y) \wedge x \neq y) \supset (Larger(x,y) \vee Smaller(x,y)))$
F_4: $\forall x \forall y \forall z((Smaller(x,y) \wedge Smaller(y,z)) \supset Smaller(x,z))$
F_5: $\forall x \forall y(Larger(x,y) \supset x \neq y)$
F_6: $\forall x \forall y \forall z(Between(x,y,z) \vee \neg Between(x,y,z))$
F_7: $\forall x \forall y \forall z(Between(x,y,z) \vee \neg Between(x,z,y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.
2. Quelle formule est une tautologie ?
3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. ♢

EXERCICE 4 On se place dans le calcul des prédicats, et on rappelle que les formules sont définies inductivement comme suit (T désigne l'ensemble des termes formé à partir des symboles de fonction de F et des variables de X) :

(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables liées dans une formule. On notera $L(p)$ l'ensemble des variables liées dans la formule p. Indication : on rappelle qu'une variable est liée dans une formule si elle a toutes ses occurrences liées dans cette formule. ♢

note finale de cette partie = (note/20) * 10

1. 3pts Avec les notations du cours :

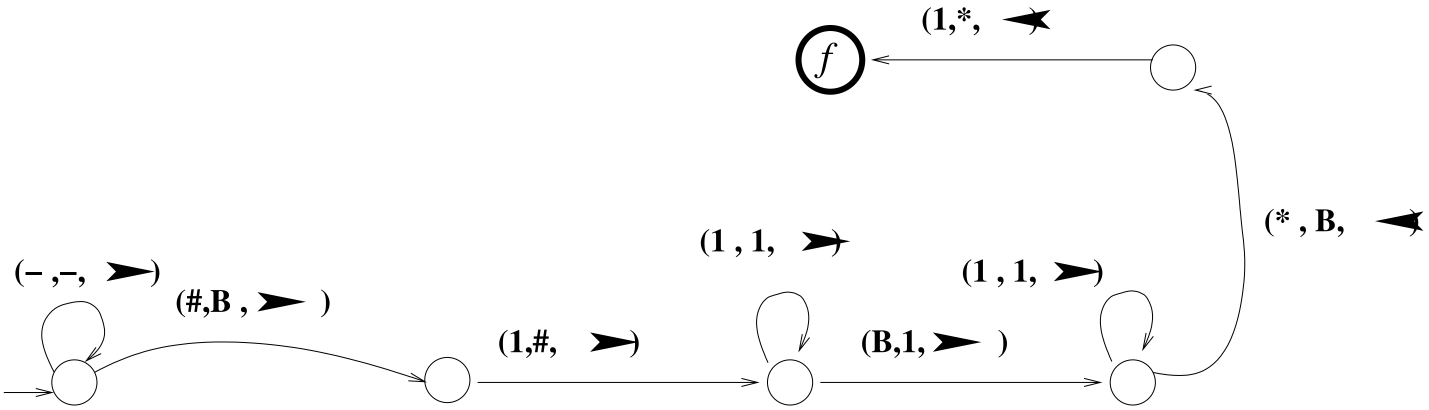

Figure 1

2. 1 non (capture de variable), 2 et 3 oui (on ne substitue que les occurences libres), 2 $(\exists y R(x,y)) \supset \forall x \forall z R(x,z)$, 3 $(\exists y R(f(z),y)) \supset \forall x \forall z R(x,z)$.

4. 2pts $\forall x' \exists z \forall y (R(x,y) \supset R(x',z))$ ou $\forall x' \forall y \exists z (R(x,y) \supset R(x',z))$ ou $\forall y \forall x' \exists z (R(x,y) \supset R(x',z))$.

3. tautologie F_6.

T-valides : F_1, F_4, F_5, F_6, F_7

non T-valides F_2, F_3 : pour F_2 il suffit que x ne soit pas un dodec, pour F_3 il suffit que x et y soient de même taille.

Contre-exemples pour les T-valides : F_1 prendre la même interprétation pour BackOf et FrontOf, F_4 Smaller(x,y) interprété par $x = y$, F_5 inégalité large pour Larger, F_7 Between(x,y,z) interprété par $y = x + z$.

4. Soit $F(p)$ l'ensemble des variables libres dans la formule p (vu en cours).

Base : si $p = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $L(p) = \emptyset$,

Induction : $L(\neg p) = L(p)$

$$L(p * q) = \Big(L(p) \setminus F(p)\Big) \cup \Big(L(q) \setminus F(p)\Big) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\}$$

$$L(\forall x p) = L(\exists x p) = L(p) \cup \{x\}$$