EXAMEN LOGIQUE - 14 Septembre 2006
DOCUMENTS et calculettes interdits
les exercices sont indépendants

Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée DOCUMENTS et calculettes interdits

Exercice 1 (Question de cours) 1. L'ensemble *Taut* des formules du calcul propositionnel qui sont valides pour toute interprétation (les Tautologies du calcul propositionnel) est-il décidable ? Justifier votre réponse.

2. L'ensemble *Valpre* des formules du calcul des prédicats qui sont valides pour toute interprétation (i.e. les "tautologies" du calcul des prédicats) est-il décidable ? Justifier votre réponse. $\diamondsuit$

Exercice 2 (Question de cours) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul et $bin(n)$ sa représentation binaire. Construire une machine de Turing qui, si on lui donne $\#bin(n)*$ en entrée avec la tête positionnée sur $\#$, va terminer avec $\#bin(n/2)*$ lorsque n est pair, et va boucler lorsque n est impair. $\diamondsuit$

Exercice 3 Soit F la formule $(\forall x\ R(x,y)) \vee \exists z \forall y\ R(y,z)$.

1. $f(x,z)$ est-il substituable à x ? Donner le résultat de la substitution si oui, et justifier la réponse si non.

2. $f(y,z)$ est-il substituable à y ? Donner le résultat de la substitution si oui, et justifier la réponse si non.

3. Trouver deux formules prénexes équivalentes à F. $\diamondsuit$

Exercice 4 On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x\ (Small(x) \vee Medium(x) \vee Large(x))$
F_2: $\forall x \forall y\ (LeftOf(x,y) \supset (RightOf(y,x)))$
F_3: $\forall x \forall y\ (LeftOf(x,y) \vee \neg LeftOf(x,y))$
F_4: $\neg \exists x \exists y\ (Smaller(x,y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$
F_5: $\forall x \forall y \forall z((BackOf(x,z) \wedge Between(y,x,z)) \supset BackOf(x,y))$
F_6: $\forall x \forall y \forall z\ ((Larger(x,y) \wedge \neg Larger(x,y)) \supset \neg Between(x,z,y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ?

3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. $\diamondsuit$

Exercice 5 On considère un langage avec les prédicats unaires $prime, even$, la constante 1, et la fonction unaire s (successeur). Traduire en formules logiques les énoncés :

1. tout nombre pair est premier
2. aucun nombre pair n'est premier
3. certains nombres premiers sont pairs
4. certains nombres premiers ne sont pas pairs
5. tout nombre premier est soit pair, soit égal à 2

Parmi les formules obtenues, lesquelles sont vraies dans $\mathbb{N}$. Justifier les réponses. $\diamondsuit$

note finale de cette partie = (note/30) * 10

1.
6pts 1. oui, il suffit de faire la table de vérité. 2. non, par réduction au problème de l'arrêt d'une machine de Turing.

2.
4pts Voir cours

3. 1. 1pt oui (résultat F car il n'a a aucune occurrence libre de x).
2. 1pt oui Remarquer qu on ne substitue que les occurences libres, donc on ne substitue que dans $(\forall x\ R(x, y))$; donc $F[y := f(y, z)] = (\forall x\ R(x, f(y, z))) \vee \exists z \forall y\ R(y, z)$.
3. 2pts $(\forall x\ z \forall y'\ (R(x, y)) \wedge R(y', z)\ )$ et $(\exists z \forall x \forall y'\ (R(x, y)) \wedge R(y', z)\ )$

4. 1pt par formule (sauf F_5 : 2pts)
(i) tautologies : F_3, F_6
(ii) formules T-valides : F_1, F_2, F_3, F_4, F_6,
pour falsifier F_1 : construire un univers comprenant par exemple des objets *Huge* plus grands que les objets *Large* (avec un prédicat Huge(x)), ou bien prendre comme interprétation $\mathbb{N}$ avec $Small_I(x)$, $Medium_I(x)$, $Large_I(x)$ qui sont vrais ssi x est pair.
pour falsifier F_2 (resp. F_4) : prendre l'interprétation de $LeftOf(x, y)$ au sens large (i.e. x est à gauche de y ou sur la même colonne que y) (resp. prendre l'interprétation de $Smaller(x, y)$ comme un ordre large (i.e. x est plus petit ou égal à y)).
(iii) formules non T-valides : F_5 prendre x y z comme dans la figure 1

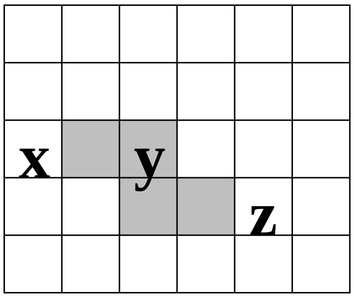

Figure 1 Contrexemple montrant que F_5 n'est pas T-valide

5. 1. $\forall x(even(x) \supset prime(x))$, faux dans $\mathbb{N}$. 2. $\neg\exists x(even(x) \wedge prime(x))$, faux dans $\mathbb{N}$. 3. $\exists x(even(x) \wedge prime(x))$, vrai dans $\mathbb{N}$. 4. $\exists x(prime(x) \wedge \neg even(x))$, vrai dans $\mathbb{N}$. 5. $\forall x(prime(x) \supset (even(x) \vee (x = s(1))))$, vrai dans $\mathbb{N}$.