LOGIQUE - 20 Décembre 2006
Documents Interdits - Rédigez sur une copie séparée
Les exercices sont indépendants

EXERCICE 1 1) Soit S l'ensemble de clauses :$S = \{P \vee \neg Q(b) \ , \ P \vee Q(x) \ , \ \neg P \vee \neg Q(x) \ , \ \neg P \vee Q(a)\}$. Montrer par résolution que S n'est pas satisfaisable (il faut trouver une réfutation de S).

2) Soit F la formule : $F_1 \ \supset \ F_2$ où
$F_1 = (\exists x(P \supset Q(x))) \wedge (\exists x(Q(x) \supset P))$ et $F_2 = \exists x((P \supset Q(x)) \wedge ((Q(x) \supset P)))$.

Montrer que F est universellement valide en utilisant le principe de résolution : pour ce faire, on montre que $\neg F$ est insatisfaisable, en (a) mettant $\neg F$ sous forme prénexe, d'où une formule F' (b) skolémisant cette forme prénexe F', d'où une formule G (c) mettant G sous forme clausale, et (d) en réfutant l'ensemble de clauses obtenu.

3) La formule F' (question 2)(a)) est-elle équivalente à la formule G (question 2)(b)) ? $\diamondsuit$

EXERCICE 2 Soit F la formule $(\forall x \, s(x,y)) \supset (\exists y \, r(x,y))$. Donner une forme prénexe de F. $\diamondsuit$

EXERCICE 3 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats unaires P et Q. On définit une interprétation I de domaine $E = \mathbb{N}$, avec :

- $a_I = 0$,
- s_I est défini par $s_I(n) = n + 1$ et
- $P_I(n) = vrai$ si et seulement si n est pair,
- $Q_I(n) = vrai$ si et seulement si n est impair.

Soient les formules $F_1 = P(a) \wedge \neg Q(a)$, $F_2 = \forall x(P(x) \supset P(s^2(x)))$ et $F_3 = \forall x(Q(x) \supset Q(s^3(x)))$.

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$? I est-elle modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
2. Donnez deux modèles de $\{F_1, F_2, F_3\}$.
3. Montrez par résolution et induction sur n que $\{F_1, F_2, F_3\} \vdash P(s^{2n}(a))$. $\diamondsuit$

T.S.V.P.

1. 1. Des clauses $\{P \vee \neg Q(b)\ ,\ P \vee Q(x)\}$ on déduit P, des clauses $\{\neg P \vee \neg Q(x)\ ,\ \neg P \vee Q(a)\}$ on déduit $\neg P$, et ensuite la clause vide.

2. $\neg F$ est $\neg[(\exists x(P \supset Q(x))) \wedge (\exists x(Q(x) \supset P)) \supset \exists x((P \supset Q(x)) \wedge ((Q(x) \supset P)))]$, soit $\neg[\neg(\exists x(P \supset Q(x))) \wedge (\exists x(Q(x) \supset P)) \vee \exists x((P \supset Q(x)) \wedge ((Q(x) \supset P)))]$, ou $(\exists x(P \supset Q(x))) \wedge (\exists x(Q(x) \supset P)) \wedge \neg\exists x((P \supset Q(x)) \wedge ((Q(x) \supset P)))]$,

(a) F' est (renommer les variables liées)
$(\exists x'(P \supset Q(x'))) \wedge (\exists x''(Q(x'') \supset P)) \wedge \forall x(\neg(P \supset Q(x)) \vee \neg((Q(x) \supset P)))]$, soit encore
$\exists x'\exists x''\forall x((P \supset Q(x'))) \wedge (Q(x'') \supset P) \wedge (\neg(P \supset Q(x)) \vee \neg((Q(x) \supset P)))]$,

(b) G est $\forall x(\ (P \supset Q(a)) \wedge (Q(b) \supset P) \wedge ((P \wedge \neg Q(x)) \vee ((Q(x) \wedge \neg P))$

(c) la forme clausale de G est
$S = \{P \vee \neg Q(b)\ ,\ \neg P \vee Q(a)\ ,\ P \vee Q(x)\ ,\ \neg P \vee \neg Q(x)\ ,\ \neg P \vee P\ ,\ \neg Q(x) \vee Q(x)\}$
qui contient S et est donc réfutable.

(d) non, G n'est pas équivalente à F', elle est seulement équisatisfaisable avec F' : en effet, les constantes a, b ne sont pas nécessairement les valeurs de x', x'' qui rendront F' valide.

2. RAPPEL : on renomme les variables liées $\exists x'\exists y'(s(x', y)) \supset r(x, y'))$.

3. 1. I est modèle de F_1, est modèle de F_2 (car x pair implique $s^2(x)$ pair) et pas de F_3 (car x impair n'implique pas $s^3(x)$ impair), et donc I n'est pas modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$.

2. un modèle : $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$, et

- $P_I(n) = vrai$ si et seulement si n est pair,
- $Q_I(n) = vrai$ si et seulement si n est multiple de 3.

un autre modèle : $a_I = 1$, et $s_I(n) = n + 1$, et

- $P_I(n) = vrai$ pour tout n,
- $Q_I(n) = faux$ toujours.

3. pour $n = 0$, il suffit de remarquer que la forme clausale de F_1 est $P(a)\ ,\ \neg Q(a)$, et donc $P(a)$ est conséquence de $\{F_1, F_2, F_3\}$. Ensuite, on suppose $P(s^{2n}(a))$ et on fait une étape de résolution à partir de F_2.