Examen – Septembre 2006

Aucun document autorisé

Rappels.

• Règles de typage des λ-termes.

$$(\textsc{Var})\frac{}{(x,\tau),\Gamma \vdash x : \tau} \qquad (\textsc{App})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Gamma \vdash (t_1\ t_2) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Abs})\frac{(x,\tau_1),\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \qquad (\textsc{Pair})\frac{\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash t_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (t_1,t_2) : \tau_1 \times \tau_2}$$

$$(\textsc{Fst})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(t) : \tau_1} \qquad (\textsc{Snd})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 \times \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(t) : \tau_2}$$

$$(\textsc{Inj}_l)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2} \qquad (\textsc{Inj}_r)\frac{\Gamma \vdash t : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(t) : \tau_1 + \tau_2}$$

$$(\textsc{Case})\frac{\Gamma \vdash t : \tau_1 + \tau_2 \quad (x_1 : \tau_1),\Gamma \vdash t_1 : \tau \quad (x_2 : \tau_2),\Gamma \vdash t_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{case}_{\tau_1,\tau_2}\ t\ \mathsf{of}\ \mathsf{inj}^l_{\tau_1,\tau_2}(x_1) \mapsto t_1 \mid \mathsf{inj}^r_{\tau_1,\tau_2}(x_2) \mapsto t_2 : \tau}$$

• Règles de déduction.

$$(Hyp)\frac{}{A,\Gamma \vdash A} \qquad (I_\Rightarrow)\frac{A,\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad (E_\Rightarrow)\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad (E^l_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad (E^r_\wedge)\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(I^l_\vee)\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (I^r_\vee)\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad (E_\vee)\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad A,\Gamma \vdash C \quad B,\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Exercice 1 Qu'est ce que le paradoxe de Russel ?

Exercice 2 Dans cet exercice, on note $\boldsymbol{I}$ le λ-terme $\lambda x.x$. Etant donné un entier n, on définit le λ-terme $\boldsymbol{I}^n$ comme suit :

$$\boldsymbol{I}^0 = \boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{I}^{n+1} = (\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{I}^n)$$

1. Quel est le type du terme $\boldsymbol{I}$?
2. Montrer, par récurrence sur n, que $\forall n > 0 \quad \boldsymbol{I}^{n+1} \rightarrow_\beta \boldsymbol{I}^n$.
3. Montrer, par récurrence sur n, que le type de $\boldsymbol{I}^n$ est $(A \rightarrow A)$ où A est n'importe quel type.

4. Parmi les λ-termes de l'ensemble $\{\boldsymbol{I}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ quels sont ceux qui :
   (a) sont α-équivalents ?
   (b) sont β-équivalents ?
   (c) sont en forme normale ?
   (d) correspondent à une preuve sans coupures ?

Exercice 3 On considère l'arbre de preuve D suivant :

$$
(?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)} \quad (?)\dfrac{(?)\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}}{\underbrace{A \wedge B, A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B}_{\Gamma} \vdash C \Rightarrow A}}{A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)}}{A \wedge B \vdash (A \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))} \quad (?)\dfrac{(?)\dfrac{(?)\dfrac{}{C, A, A \wedge B \vdash A}}{A, A \wedge B \vdash C \Rightarrow A}}{A \wedge B \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)}}{A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)} \quad (?)\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}}{A \wedge B \vdash C \Rightarrow A}}{\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)}
$$

1. Quelles sont les règles utilisées dans cette preuve ? Remplacer les "?" par les noms de règle.
2. Cette preuve contient au moins une coupure. Indiquer clairement ou elle se situe.
3. Eliminer les coupures de D en expliquant pour chaque étape les différentes transformations que vous effectuez sur l'arbre (attention, l'élimination d'une coupure peut en introduire une autre !). Soit D' l'arbre de preuve obtenu.
4. Construire le λ-terme t correspondant à D.
5. Normaliser le terme t. Quel est le type du terme obtenu ? Pourquoi ? A quelle preuve correspond il ? Pourquoi ?