

Examen – Janvier 2005

Durée : 3 heures.

Documents autorisés

Exercice 1 L'article *Ensembles et Preuves* de J.L. Krivine se termine par une question :

Comment diable se fait-il qu'un théorème, démontré dans les années 30, alors qu'il n'existait pas l'ombre d'un ordinateur, puisse nous parler de la sécurité d'un système informatique ? De quel système informatique s'agit-il donc ? Il n'y a qu'une réponse possible, il s'agit, bien sûr, de la seule marque d'ordinateur commercialisée à l'époque, et qui est d'ailleurs sur le marché depuis quelques centaines de milliers d'années.

De quel système informatique s'agit-il donc ?

Réponse : 1 à 5 lignes maximum

Exercice 2 Quel est le résultat (vu en cours) portant sur le λ -calcul permettant d'assurer que si un séquent est prouvable en déduction naturelle, alors il admet une preuve sans coupure ?

Réponse : 1 à 5 lignes maximum

Exercice 3 Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R))$$

et donner le λ -terme correspondant à cette preuve.

Exercice 4 On considère l'arbre de preuve D suivant :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{(\?) \overline{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)} (\?) \overline{\Gamma \vdash A}}{A \wedge B, A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B \vdash C \Rightarrow A} \Gamma}{(\?) \overline{A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)}} (\?) \overline{A \wedge B \vdash (A \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))} (\?) \overline{C, A, A \wedge B \vdash A}} (\?) \overline{A, A \wedge B \vdash C \Rightarrow A}} (\?) \overline{A \wedge B \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)}} (\?) \overline{A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)}} (\?) \overline{A \wedge B \vdash C \Rightarrow A}} (\?) \overline{A \wedge B \vdash A \wedge B}} (\?) \overline{\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)}$$

1. Quelles sont les règles utilisées dans cette preuve ? Remplacer les “?” par les noms de règle.
2. Cette preuve contient au moins une coupure. Indiquer clairement où elle se situe.
3. Eliminer les coupures de D en expliquant pour chaque étape les différentes transformations que vous effectuez sur l'arbre (attention, l'élimination d'une coupure peut en introduire une autre !). Soit D' l'arbre de preuve obtenu.
4. Construire le λ -terme t correspondant à D .
5. Normaliser le terme t . Quel est le type du terme obtenu ? Pourquoi ? A quelle preuve correspond il ? Pourquoi ?