Documents Interdits - Rédigez sur une copie séparée
Les exercices sont indépendants

EXERCICE 1 Montrer que $\{p\ ,\ p \supset q\} \vdash q$ (i) par le calcul des séquents, (ii) par résolution. $\diamondsuit$

EXERCICE 2 Soit E un ensemble muni de 2 relations (prédicats) binaires $arc, chem$ et 3 constantes a, b, c. On considère l'ensemble P de formules :

$$\begin{array}{rl} & arc(a,b) \\ & arc(b,c) \\ & arc(a,d) \\ & arc(d,c) \\ \forall x,y & chem(x,y) \vee \neg arc(x,y) \\ \forall x,y,z & chem(x,y) \vee \neg arc(x,z) \vee \neg chem(z,y) \end{array}$$

1) Trouver 2 modèles non isomorphes de P.
2) Prouvez par résolution que :

$$P \vdash \exists x chem(x,c) \tag{1}$$

(Rappel : on mettra $P \cup \{\neg \exists x chem(x,c)\}$ sous forme clausale, puis on en donnera une réfutation.)

Existe-t-il une autre réfutation de (1) ? Si oui, donnez-la. $\diamondsuit$

EXERCICE 3 Soit F la formule $(\forall x\ R(x,y)) \supset \forall y\ R(x,y)$.

1. $f(x,z)$ est-il substituable à x ? Donner le résultat de la substitution si oui, et justifier la réponse si non.
2. $f(x,y)$ est-il substituable à x ? Donner le résultat de la substitution si oui, et justifier la réponse si non.
3. Trouver deux formules prénexes (différentes) équivalentes à F.
4. Skolemiser les formules prénexes obtenues à la question 3. $\diamondsuit$

EXERCICE 4 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats unaires P et Q. On définit une interprétation I de domaine $E = \mathbb{N}$, avec :

- $a_I = 0$,
- s_I est défini par $s_I(n) = n + 1$ et
- $P_I(n) = vrai$ si et seulement si n est impair,
- $Q_I(n) = faux$ pour tout n.

Soient les formules $F_1 = Q(a)$, $F_2 = \forall x \Big(P(x) \supset P(\ s(s(x))\ ) \Big)$ et $F_3 = Q(x) \supset P(a)$.

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$? I est-elle modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
2. Donnez deux modèles de $\{F_1, F_2, F_3\}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 1) Traduire les énoncés suivants en formules closes de Tarski's world.

1. *Tout cube est à gauche de tout tétraèdre.*
2. *Il y a exactement deux cubes.*
3. *Aucun tétraèdre n'est grand.*
4. *Aucun objet n'est plus grand que tous les objets à sa droite.*

2) Pouvez-vous dessiner un monde qui soit modèle de ces quatre formules ? $\diamondsuit$

T.S.V.P.

donne q (puisque $p \supset q$ en forme clausale est $\neg p \supset q$.

2. 1. Un graphe avec 4 sommets a, b, c, d, la relation $arc = \{(a,b),(b,c),(a,d),(d,c)\}$, et la relation *chemin* formée de $arc \cup \{(a,c)\}$.

Les entiers avec $arc(n,m)$ ssi $m = n+1$, et $chem(n,m)$ ssi $m > n$ et $a_I = 0$, $b_I = d_I = 1$ et $c_I = 2$.

2.Numérotons les clauses

$$\begin{array}{rrl} & & 1arc(a,b) \\ & & 2arc(b,c) \\ & & 3arc(a,d) \\ & & 4arc(d,c) \\ 5 & \forall x,y & chem(x,y) \vee \neg arc(x,y) \\ 6 & \forall x,y,z & chem(x,y) \vee \neg arc(x,z) \vee \neg chem(z,y) \end{array}$$

$\neg \exists x chem(x,c)$ est la clause 7. $\forall x \neg chem(x,c)$.

de 7 et 6 on déduit : $\neg arc(x,z) \vee \neg chem(z,c)$, avec 5, on déduit : $\neg arc(x,z) \vee \neg arc(z,c)$ puis avec 4, on déduit : $\neg arc(x,d)$ et avec 3, on obtient la clause vide. on peut changer et utiliser 2 au lieu de 4, d'où $\neg arc(x,b)$ et avec 1, on obtient la clause vide.

3. 1. et 2. On renomme les variables liées : $F = (\forall x' \ R(x',y)) \supset \forall y' \ R(x,y')$. oui Remarquer qu on ne substitue que les occurences libres, donc résultat $(\forall x' \ R(x',y)) \supset \forall y' \ R(f(x,z),y')$.

2. non : capture de la variable y qui est libre dans $f(x,y)$.

3. $\forall x' \ \exists y' \ (R(x',y) \supset \ R(x,y'))$ et $\exists y' \forall x' (R(x',y) \supset \ R(x,y'))$.

4. $\forall x' \ \exists y' \ (R(x',y) \supset \ R(x,f(x')))$ et $\forall x' (R(x',y) \supset \ R(x,a))$.

4. 1. I n'est pas modèle de F_1, est modèle de F_2 (car x impair implique $s^2(x)$ impair) et F_3 (car Q toujours faux), et donc I n'est pas modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$.

2. un modèle : $a_I = 0$, et $s_I(n) = n+1$, et

- $P_I(n) = vrai$ si et seulement si n est pair,
- $Q_I(n) = vrai$ si et seulement si n est impair ou $n = 0$.

un autre modèle : $a_I = 1$, et $s_I(n) = n+1$, et

- $P_I(n) = vrai$ pour tout n,
- $Q_I(n) = vrai$ si et seulement si n est impair.

5. 1)

1. Tout cube est à gauche de tout tétraèdre. $\forall x \forall y[(Cube(x) \wedge Tet(y)) \supset LeftOf(x,y)]$
2. Il y a exactement deux cubes. $\exists x \exists y[(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \wedge \forall z(Cube(z) \supset ((z = x) \vee (z = y)))]$
3. Aucun tétraèdre n'est grand. $\forall x \ (\ Tet(x) \supset \neg Large(x) \ )$
4. Aucun objet n'est plus grand que tous les objets à sa droite. $\neg \exists x[\forall y(\ RightOf(y,x) \supset Larger(x,y) \ )]$

2) Un monde avec deux cubes est modèle des 3 premières, mais on ne peut pas avoir de modèle de 4, puisque l'objet le plus à droite est plus grand que tous les objets à sa droite.