PARTIEL LOGIQUE - 29 Octobre 2008
Les exercices sont indépendants.
Documents et calculette interdits.

On rapelle les règles du calcul des séquents.

– hypothèse : $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash F$
– augmentation : si $G \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \cup \{G\} \vdash F$
– modus ponens : si $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$ et si $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$
– synthèse : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$
– double négation : $\mathcal{F} \vdash F$ *si et seulement si* $\mathcal{F} \vdash \neg\neg F$
– règle du raisonnement par l'absurde : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ et $\mathcal{F}, F \vdash \neg F'$, alors $\mathcal{F} \vdash \neg F$.

Exercice 1 Préciser les règles de calcul des séquents appliquées dans la déduction suivante.

$$\begin{array}{llr}
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ p & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg p & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg p \supset \neg r & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg r & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg q & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg q \supset r & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ r & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg q & (& ...?) \\
p, \neg q \supset r, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ q & (& ...?)
\end{array}$$

♢

Exercice 2 Considérons les énoncés suivants :

- Si la démocratie est le meilleur système de gouvernement, alors tout le monde doit voter.
- La démocratie est le meilleur système de gouvernement.
- Donc tout le monde doit voter.

1. Formaliser ces trois énoncés en calcul propositionnel. Indication : introduire les variables propositionnelles $D=$ "le système est la démocratie", $M=$ "le système est le meilleur système de gouvernement", $T=$ "tout le monde doit voter".

2. Montrer que les deux premiers impliquent le troisième

(i) par le calcul des séquents.
(ii) par résolution. ♢

Exercice 3 Soit E un ensemble muni de 2 relations (prédicats) binaires $arc, chem$ et 3 constantes a, b, c. On considère l'ensemble P de formules :

$$\begin{array}{rl}
 & arc(a,b) \\
 & arc(b,c) \\
\forall x & chem(x,x) \\
\forall x, y & chem(x,y) \vee \neg arc(x,y) \\
\forall x, y, z & chem(x,y) \vee \neg arc(x,z) \vee \neg chem(z,y)
\end{array}$$

1. Trouver deux modèles différents de P.
2. Montrer par résolution que $P \vdash chem(a,c)$. ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 4 Soit F la formule $(\exists y R(x,y)) \supset \forall x \forall z (R(x,z) \vee R(y,z))$.

1. $f(y)$ est-il substituable à x ?
2. $g(x,z)$ est-il substituable à y ?
3. $f(z)$ est-il substituable à x ?

Dans les cas où le terme est substituable, faire la substitution et donner le résultat.

Dans les cas où le terme n'est pas substituable, expliquer pourquoi, faire le renommage qui convient et donner le résultat. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 Traduire par des formules les propriétés suivantes : (on interprète la phrase *le cube est grand* par : il y a exactement un cube, et il est grand ; cette phrase sera supposée fausse si par exemple

il n'y a pas de cube, ou s'il y en a deux)

1. *Il y a au moins deux dodécaèdres.*
2. *Il y a au plus deux tétraèdres.*
3. *Il y a exactement deux cubes.*
4. *Il y a seulement trois objets qui ne sont pas petits.*
5. *Le petit tétraèdre n'a rien devant lui.*
6. *Le tétraèdre qui a quelque chose devant lui est grand.*
7. *Aucun dodécaèdre n'est derrière le grand cube.*
8. *Le cube moyen est à droite du grand cube.*
9. *Le seul objet n'ayant rien à sa droite est le cube moyen.*
10. *Le plus petit cube est moyen.* $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Démontrer le théorème de la déduction, que l'on rappelle ci-après : $\{F_n, \ldots, F_1\} \models F$ si et seulement si

$$\emptyset \models F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset F) \cdots)).$$

$\diamondsuit$

1.

$$
\begin{array}{lr}
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ p & \text{(Hypothèse)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg p & \text{(double negation)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg p \supset \neg r & \text{(Hypothèse)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg r & \text{(modus ponens)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg q & \text{(Hypothèse)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg q \supset r & \text{(Hypothèse)} \\
p, \neg q \supset r, \neg q, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ r & \text{(modus ponens)} \\
p, \neg q \supset r, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ \neg\neg q & \text{(absurde)} \\
p, \neg q \supset r, \neg\neg p \supset \neg r \ \vdash \ q & \text{(double négation)}
\end{array}
$$

2.
les formules sont $(D \supset M) \supset T$, $(D \supset M)$; et on a, par calcul des s˜ :
$(D \supset M) \supset T, (D \supset M) \ \vdash \ (D \supset M) \supset T$ (hypothèse)
$(D \supset M) \supset T, (D \supset M) \ \vdash \ (D \supset M)$ (hypothèse)
$(D \supset M) \supset T, (D \supset M) \ \vdash \ T$ (modus ponens)

Par résolution : il faut d'abord mettre $(D \supset M) \supset T$, $(D \supset M)$, $\neg T$ sous forme clausale. $(D \supset M)$, $\neg T$ sont déjà des clauses et la forme clausale de $(D \supset M) \supset T$ est $D \vee T$ et $\neg M \vee T$.
de $D \vee T$ et $\neg D \vee M$ on déduit $T \vee M$
de $T \vee M$ et $\neg M \vee T$ on déduit T
de T et $\neg T$ on déduit la clause vide.

3.
$\mathbb{N}$ avec $arc(x, y)$ ssi $y = x + 1$ et $chem(x, y)$ ssi $y \geq x$ et $a = 0,\ b = 1,\ c = 2$.
un graphe $a_0 \longrightarrow b_0 \longrightarrow c_0$, et $chem_0(x, y)$ la relation "il y a un chemin (une suite d'arcs du graphe)" entre x et y.
Forme clausale : $P \cup \neg chem(a, c)$.
De $chem(x, y) \vee \neg arc(x, z) \vee \neg chem(z, y)$ et $arc(a, b)$ on déduit $chem(a, y) \vee \neg chem(b, y)$
De $chem(a, y) \vee \neg chem(b, y)$ et $chem(x, y) \vee \neg arc(x, y)$ on déduit $chem(a, y) \vee \neg arc(b, y)$
De $chem(a, y) \vee \neg arc(b, y)$ et $arc(b, c)$ on déduit $chem(a, c)$
De $chem(a, c)$ et $\neg chem(a, c)$ on déduit la clause vide.

4. 1 NON (capture de variable libre x) $(\exists y' R(f(y), y')) \supset \forall x \forall z (R(x, z) \vee R(y, z))$.
2 non (capture de variable libre y) : $(\exists y R(x, y)) \supset \forall x' \forall z' (R(x', z') \vee R(g(x, z), z'))$.
3 oui. $(\exists y R(f(z), y)) \supset \forall x \forall z (R(x, z) \vee R(y, z))$.

5.
1. Il y a au moins deux dodécaèdres. $\exists x \exists y dodec(x) \wedge dodec(y) \wedge (x \neq y)$
2. Il y a au plus deux tétraèdres. $\exists x \exists y (tet(x) \wedge tet(y) \wedge \forall z\ (tet(z) \longrightarrow\ ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))))$
3. Il y a exactement deux cubes. $\exists x \exists y\ (cube(x) \wedge cube(y) \wedge (x \neq y) \wedge (\forall z (cube(z) \longrightarrow ((x = z) \vee (y = z)))))$
4. Il y a seulement trois objets qui ne sont pas petits. $\exists x \exists y \exists z\ (\neg small(x) \wedge \neg small(y) \wedge \neg small(z) \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z) \wedge (\forall t (\neg small(t) \longrightarrow ((t = x) \vee (t = z) \vee (t = y)))))$

5. Le petit tétraèdre n'a rien devant lui. $\exists x(tet(x) \wedge small(x) \wedge (\forall z \neg frontof(z, x)))$
6. Le tétraèdre qui a quelque chose devant lui est grand. $\exists x\big(\exists z(tet(x) \wedge frontof(z, x)) \wedge \forall y(\exists z(tet(y) \wedge frontof(z, y)) \supset y = x) \wedge large(x)\big)$
7. Aucun dodécaèdre n'est derrière le grand cube. $\exists x(cube(x) \wedge large(x) \wedge (\forall z dodec(z) \longrightarrow \neg backof(z, x)) \wedge (\forall y(cube(y) \wedge large(y) \longrightarrow y = x)))$
8. Le cube moyen est à droite du grand cube. $\exists x(cube(x) \wedge large(x) \wedge (\forall y(cube(y) \wedge large(y) \longrightarrow y = x))) \wedge \exists z(cube(z) \wedge medium(z) \wedge (\forall y(cube(y) \wedge medium(y) \longrightarrow y = z))) \wedge rightof(z, x)$
9. Le seul objet n'ayant rien à sa droite est le cube moyen. $\exists z(cube(z) \wedge medium(z) \wedge (\forall y(cube(y) \wedge medium(y) \longrightarrow y = z)) \wedge (\forall x \neg rightof(x, z)) \wedge (forallt(\forall x \neg rightof(x, t)) \supset t = z))$
10. Le plus petit cube est moyen. $\exists x(cube(x) \wedge medium(x) \wedge (\forall y(cube(y) \longrightarrow smaller(x, y))) \wedge \forall z((cube(z) \wedge (\forall y(cube(y) \longrightarrow smaller(z, y)))) \longrightarrow z = x))$

6. voir Cours