PARTIEL LOGIQUE - Novembre 2002

les exercices sont indépendants

EXERCICE 1 Trouver une formule logique dont la table de vérité est définie par :

$f(x,y)$	x / y	0	1
	0	0	0
	1	1	0

Pouvez vous trouver d'autres formules ayant la même table de vérité ? ◇

EXERCICE 2 On suppose un univers partitionné en 4 types d'individus

- chat heureux
- chat malheureux
- souris heureuse
- souris malheureuse

On choisit une espèce (chat , souris) et une attitude (heureux, malheureux) ; on dit qu'un type est *nonOK* s'il n'a ni l'espèce choisie, ni l'attitude choisie. Sachant qu'un chat malheureux est *nonOK*, quel(s) autre(s) type(s) sont *nonOK* ? ◇

EXERCICE 3 Il y a 2 types d 'individus, les chevaliers (disant toujours la vérité) et les fripons (mentant toujours). Il y a 3 personnes, p, q, r qui sont de l'un des 2 types. p dit "q est un chevalier", et q dit "p et r sont du même type". De quel type est r ? Justifiez votre réponse. ◇

EXERCICE 4 On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules suivantes : $\{\neg\neg a\ ,\ a \supset b\ ,\ \neg b \vee c\ ,\ c \equiv e\ ,\ \neg(e \vee f)\}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont conséquences de $\mathcal{F}$ (vous pouvez choisir une seule possibilité) : (i) $\neg a$,(ii) $\neg b$,(iii) b ,(iv) f , (v) les quatre formules (i)–(iv). Justifiez votre réponse. ◇

EXERCICE 5 1. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant la méthode des arbres sémantiques.

2. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant les règles du calcul des séquents auxquelles on a ajouté les trois règles :

- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F$,
- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$,
- si $\mathcal{F}, G \vdash F$ et $\mathcal{F}, \neg G \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \vee F')$.

3. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant la résolution. ◇

EXERCICE 6 Soit $\phi = \forall x \exists y \big(p(x) \wedge q(y)\big)$ et $\psi = \exists y \forall x \big(p(x) \wedge q(y)\big)$. On déduit ψ à partir de ϕ. Laquelle des déductions suivantes est correcte ? Vous justifierez votre réponse en précisant les règles appliquées à chaque étape de la déduction correcte, et en donnant un contrexemple pour l'étape fausse de la déduction fausse : votre contrexemple sera un modèle de la ligne précédant la ligne fausse, et ne sera pas un modèle de la ligne fausse. Vous pourrez utiliser toutes les règles de la forme $\mathcal{F} \vdash F$ ou $F \Longleftrightarrow G$ énoncées dans le cours.

$$
\begin{array}{llr}
1) & \phi \ \vdash\ \exists y \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(instantiation)} \\
& \phi \ \vdash\ p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) & (\ldots ?) \\
& \phi \ \vdash\ \forall x \Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big) & (\ldots ?) \\
& \phi \ \vdash\ \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) & (\ldots ?)
\end{array}
$$

$$\phi \ \vdash \ \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

2) $$\phi \ \vdash \ \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad \text{(instantiation)}$$

$$\phi \ \vdash \ \neg\forall y \neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \neg\forall y \neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$$\phi \ \vdash \ \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad (\ldots ?)$$

$\diamondsuit$

Exercice 7 Donner une définition inductive de la notion de variable liée dans une formule. (Par définition inductive, on entend une définition de la forme : si $F = \ldots$ est une formule atomique, alors $VL(F) = \ldots$; sinon, si $F = \ldots$, alors $VL(F) = \ldots$ etc.) $\diamondsuit$

Exercice 8 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats unaires P et Q. On définit une interprétation I par $I = \langle E, \gamma, h \rangle$, avec

- $E = \mathbb{N}$,
- $h(a) = a_I = 0$,
- $h(s) = s_I$ est défini par $h(s)(n) = n + 1$ et
- $\gamma(P)$ défini par $\gamma(P)(n) = vrai$ si et seulement si n est pair,
- $\gamma(Q)$ défini par $\gamma(Q)(n) = vrai$ pour tout n.

Soient les ensembles de formules $F_1 = \{Q(a)\}$, $F_2 = \Big\{\forall x\Big(Q(x) \supset Q(s(x))\Big)\Big\}$ et $F_3 = \{Q(x) \supset P(a)\}$.

1. I est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$?
2. Pouvez-vous trouver des modèles de $\{F_1, F_2, F_3\}$. $\diamondsuit$

Exercice 9 Soit F la formule $(\exists y R(x, y)) \supset \forall x \forall z(R(x, z) \vee R(y, z))$.

1. $f(x, y)$ est-il substituable à x ?
2. $g(x, z)$ est-il substituable à y ?
3. $f(x, z)$ est-il substituable à x ? $\diamondsuit$

Exercice 10 1. Donner une forme prénexe de $(\forall x \exists y R(x, y)) \supset (\forall x \exists y Q(x, y))$. Pouvez-vous donner une autre forme prénexe de la même formule ?

2. Skolemiser les formules obtenues à la question 1. $\diamondsuit$

Exercice 11 1. Ecrire des formules logiques F_1 , F_2 et F_3 traduisant que

(i) *Deux objets non comparables dans la relation "à droite de" sont égaux*

(ii) *Deux cubes quelconques ne sont jamais comparables dans la relation "à droite de"*

(iii) *Deux cubes quelconques sont égaux*

2. Montrer que $\{F_1, F_2\} \vdash F_3$
   1. Par arbres sémantiques
   2. Par le système de Hilbert-Ackermann $\diamondsuit$

1. $y\bar{x}$, $y\bar{x} + x\bar{x}$.

2. aucun

3. chevalier ; preuve par cas, on a soit p chevalier, et tous sont des chevaliers, soit p fripon, alors q fripon et r chevalier.

4. (v) car $\mathcal{F}$ est contradictoire ($\neg(e \vee f)$).

5. Forme clausale de $p \wedge q, \neg(p \vee q)$ est $p, q, \neg p, \neg q$.
1. arbre sémantique de profondeur 2 avec un seul niveau correspondant à p et $\neg p$
2.

$$
\begin{array}{lllr}
1) & p \wedge q & \vdash \; p \wedge q & \text{(hypothèse)} \\
2) & p \wedge q & \vdash \; p & \text{(règle 1 énoncé)} \\
3) & p \wedge q & \vdash \; q & \text{(règle 2 énoncé)} \\
4) & p \wedge q, p & \vdash \; p & \text{(augmentation sur 2))} \\
5) & p \wedge q, \neg p & \vdash \; q & \text{(augmentation sur 3))} \\
6) & p \wedge q & \vdash \; p \vee q & \text{(règle 3 énoncé)}
\end{array}
$$

3. résolution immédiate à partir de la forme clausale $\dfrac{p \qquad \neg p}{\square}$

6.

$$
\begin{array}{lll}
1) & \phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } y \text{ non libre dans } p(x)) \\
 & \phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge \exists y q(y) \Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi) \\
 & \phi \vdash \Big(\forall x p(x) \Big) \wedge \Big(\exists y q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } x \text{ non libre dans } \exists y q(y)) \\
 & \phi \vdash \exists y \Big(\forall x p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } y \text{ non libre dans } \forall x p(x)) \\
 & \phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } x \text{ non libre dans } q(y))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
2) & \phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash \neg \forall y \neg \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(définition de } \exists) \\
 & \phi \vdash \neg\neg \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(FAUX)} \\
 & \phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(double négation)} \\
 & \phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi)
\end{array}
$$

$$\phi \vdash \neg\forall y\neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad \text{(non justifié)}$$

$$\phi \vdash \exists y\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \qquad \text{(définition de } \exists)$$

un contrex. parmi d autres les entiers avec $p(x)$ ssi $x \geq 0$ et $q(x)$ ssi $x = 0$.

7.

$$\begin{aligned} B(p) &= \emptyset \qquad \text{si } p = R(t_1, \ldots, t_n) \\ B(\neg p) &= B(p) \\ B(p * q) &= B(p) \cap B(q) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\} \\ B(\forall xp) &= B(\exists xp) = B(p) \cup \{x\} \end{aligned}$$

8.
1. oui
2. les nombres rationnels, avec $Q(n)$ vrai ssi n est entier, $a_I = 1$ et $P(n)$ vrai ssi n est pair.

9. 1 et 2 non (capture de variable), 3 oui.

10. 1. $(\exists x\forall y\forall x'\exists y'\big(R(x,y) \supset Q(x',y')\big))$ et $(\forall x\exists y\exists x'\forall y'\big(R(x',y') \supset Q(x,y)\big))$
(entre autres, il y a en tout 6 possibilités : $\exists x\forall y\forall x'\exists y'$, $\exists x\forall x'\forall y\exists y'$, $\exists x\forall x'\exists y'\forall y$, $\forall x'\exists y'\exists x\forall y$, $\forall x'\exists x\exists y'\forall y$, $\forall x'\exists x\forall y\exists y'$.
2. $(\forall y\forall x'\big(R(a,y) \supset Q(x', f(y,x'))\big))$ et $(\forall x\forall y'\big(R(g(x),y') \supset Q(x,h(x))\big))$

11.
F_1: $\forall y\forall x\Big(\neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x)) \supset x = y\Big) = \forall y\forall x\phi$
F_2: $\forall y\forall x\Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset \neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x))\Big) = \forall y\forall x\psi$
F_3: $\forall y\forall x\Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x\Big)$
2. La forme clausale de $F_1, F_2, \neg F_3$ est (sans les $\forall$)
$leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$, $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg\ (a = b)$
La déduction avec Hilbert-Ackermann est comme suit

1)	$F_1 \supset \phi$	(instantiation)
2)	$F_2 \supset \psi$	(instantiation)
3)	F_1	(hypothèse)
4)	F_2	(hypothèse)
5)	ϕ	(modusponens 1+3)
6)	ψ	(modusponens 2+4)
7)	$(cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x$	(Prop. 1.15 (v))
8)	$finir$	$comme exemple 1.87 page 33-34$