PARTIEL LOGIQUE - 23 Novembre 2005

les exercices sont indépendants
DOCUMENTS et calculettes interdits

Téléphones éteints et rangés dans vos sacs
Rédigez les exercices de cette page sur une copie séparée
Vous pouvez rédiger les exercices 1 et 4 2. sur l'énoncé

On rapelle les règles du calcul des séquents

- utilisation d'une hypothèse : $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \vdash F$
- augmentation des hypothèses : si $G \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \cup \{G\} \vdash F$
- règle de détachement (ou modus ponens) : si $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$ et si $\mathcal{F} \vdash F$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$
- règle de synthèse (ou retrait d'une hypothèse) : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \supset F')$
- règle de la double négation : $\mathcal{F} \vdash F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\neg F$
- règle du raisonnement par l'absurde : si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ et $\mathcal{F}, F \vdash \neg F'$, alors $\mathcal{F} \vdash \neg F$.
- Si $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ *et* si t est substituable à x dans F, alors : $\mathcal{F} \vdash F[x := t]$ (règle d'instantiation).
- Si $\mathcal{F} \vdash F$ et si x n'est pas libre dans $\mathcal{F}$, alors : $\mathcal{F} \vdash \forall x F$ (règle de généralisation universelle).
- $\mathcal{F} \vdash \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\forall x \neg F$ (définition de $\exists$).

On pourra utiliser aussi les règles suivantes, énoncées ou démontrées en cours :

- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F$, (élimination de et1)
- si $\mathcal{F} \vdash (F \wedge F')$ alors $\mathcal{F} \vdash F'$, (élimination de et2)
- si $\mathcal{F}, G \vdash F$ et $\mathcal{F}, \neg G \vdash F'$ alors $\mathcal{F} \vdash (F \vee F')$ (introduction de ou) .
- $\mathcal{F} \vdash G \wedge \exists x F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \exists x(G \wedge F)$, si x n'a aucune occurrence libre dans G (prénexe1)
- $\mathcal{F} \vdash \forall x(F \wedge G)$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash (\forall x F) \wedge G)$, si x n'a aucune occurrence libre dans G (prénexe2).

Exercice 1 Soit $\phi = \forall x \exists y \big(p(x) \wedge q(y)\big)$ et $\psi = \exists y \forall x \big(p(x) \wedge q(y)\big)$. On déduit ψ à partir de ϕ. Laquelle des déductions suivantes est correcte ? Vous justifierez votre réponse en donnant le nom des règles appliquées à chaque étape de la déduction correcte, avec justification des hypothèses d'application de la règle si nécessaire, et en donnant un contrexemple pour l'étape fausse de la déduction fausse : votre contrexemple sera un modèle de la ligne précédant la ligne fausse, et ne sera pas un modèle de la ligne fausse.

1)	$\phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	(instantiation)
	$\phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )
	$\phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big)$	( )

T.S.V.P.

$$
\begin{array}{rlll}
2) & \phi \vdash & \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash & \neg\forall y\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
 & \phi \vdash & \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
 & \phi \vdash & \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
 & \phi \vdash & \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
 & \phi \vdash & \neg\forall y\neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
 & \phi \vdash & \exists y\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & (\qquad\qquad\qquad)
\end{array}
$$

♢

EXERCICE 2 1. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant les règles du calcul des séquents.
2. Montrer que $p \wedge q \vdash p \vee q$ en utilisant la résolution. ♢

EXERCICE 3 $(\forall x \exists y R(x, y, z)) \supset (\forall x \exists z Q(x, y, z))$.
1. Donner une forme prénexe de F. Donner une autre forme prénexe de la même formule ?
2. Skolemiser les formules obtenues à la question 1.
3. $f(x, y)$ est-il substituable à z ? à y ? Donner le résultat de la substitution si c'est substituable et la raison si ce n'est pas substituable.
4. $f(z, a)$ est-il substituable à z ? à y ? Donner le résultat de la substitution si c'est substituable et la raison si ce n'est pas substituable. ♢

EXERCICE 4 1. Ecrire (dans le langage de Tarski et en utilisant les prédicats $Cube$ et $LeftOf$ de Tarski) des formules logiques F_1 , F_2 et F_3 traduisant que
(i) *Deux objets non comparables dans la relation "à gauche de" sont égaux*
(ii) *Deux cubes quelconques ne sont jamais comparables dans la relation "à gauche de"*
(iii) *Deux cubes quelconques sont égaux*
2. Justifier les règles employées dans la déduction suivante par calcul des séquents, où l'on suppose que les séquents $\mathcal{F} \vdash F \supset G$ et $\mathcal{F} \vdash G \supset H$ sont prouvés (donner le nom de la règle utilisée à chaque étape).

$$
\begin{array}{rlll}
1. & \mathcal{F} \vdash & \big(F \supset G\big) & \text{(séquent prouvé)} \\
2. & \mathcal{F} \vdash & \big(G \supset H\big) & \text{(séquent prouvé)} \\
3. & \mathcal{F}, F \vdash & \big(F \supset G\big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
4. & \mathcal{F}, F \vdash & \big(G \supset H\big) & (\qquad\qquad\qquad) \\
5. & \mathcal{F}, F \vdash & F & (\qquad\qquad\qquad) \\
6. & \mathcal{F}, F \vdash & G & (\qquad\qquad\qquad) \\
7. & \mathcal{F}, F \vdash & H & (\qquad\qquad\qquad) \\
8. & \mathcal{F} \vdash & \big(F \supset H\big) & (\qquad\qquad\qquad)
\end{array}
$$

3. Montrer que $\{F_1, F_2\} \vdash F_3$
1) Par résolution (Indication : la forme clausale de $\neg F_3$ est $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg\ (a = b)$)
2) Par le calcul des séquents. ♢

1.

$$
\begin{array}{lll}
1) & \phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) & \text{(prénexe1, } y \text{ non libre dans } p(x)) \\
 & \phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi) \\
 & \phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) & \text{(prénexe2, } x \text{ non libre dans } \exists y q(y)) \\
 & \phi \vdash \exists y\Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(prénexe1, } y \text{ non libre dans } \forall x p(x)) \\
 & \phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(prénexe2, } x \text{ non libre dans } q(y))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
2) & \phi \vdash \exists y\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash \neg\forall y \neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(définition de } \exists) \\
 & \phi \vdash \neg\neg\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(FAUX)} \\
 & \phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(double négation)} \\
 & \phi \vdash \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi) \\
 & \phi \vdash \neg\forall y \neg\forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(non justifié)} \\
 & \phi \vdash \exists y \forall x\Big(p(x) \wedge q(y)\Big) & \text{(définition de } \exists)
\end{array}
$$

un contrex. parmi d autres les entiers avec $p(x)$ ssi $x \geq 0$ et $q(x)$ ssi $x = 0$.

2. Forme clausale de $p \wedge q, \neg(p \vee q)$ est $p, q, \neg p, \neg q$.
1.

$$
\begin{array}{lll}
1) & p \wedge q \vdash p \wedge q & \text{(hypothèse)} \\
2) & p \wedge q \vdash p & \text{(élim et1)} \\
3) & p \wedge q \vdash q & \text{(élim et2)} \\
4) & p \wedge q, p \vdash p & \text{(augmentation sur 2))} \\
5) & p \wedge q, \neg p \vdash q & \text{(augmentation sur 3))} \\
6) & p \wedge q \vdash p \vee q & \text{(introd. de ou)}
\end{array}
$$

2. résolution immédiate à partir de la forme clausale $\dfrac{p \qquad \neg p}{\square}$

3. 1. forme prénexe1 $\exists x \forall y' (R(x,y',z)) \supset (\forall x \exists z Q(x,y,z))$ puis $(\exists x \forall y' \forall x' \exists z' \big(R(x,y',z) \supset Q(x',y,z')\big)$ et

forme prénexe2 $(\forall x \exists z' \exists x' \forall y' \big(R(x',y',z) \supset Q(x,y,z')\big)$ (entre autres, ...)..

2. $(\forall y' \forall x' \big(R(a,y',z) \supset Q(x',y,f(y',x'))\big)$ et $(\forall x \forall y' \big(R(g(x),y',z) \supset Q(x,y,h(x))\big)$

3.$f(x,y)$ est-il substituable à z ? non (capture des variablex x, y), à y ? non (capture de la variable x)

4.$f(z,a)$ est-il substituable à z ? oui, résultat : $(\forall x \exists y R(x,y,f(z,a))) \supset (\forall x \exists z Q(x,y,z))$. à y ? non (capture de la variable z)

3. 1 et 2 non (capture de variable), 3 oui.

4.

F_1: $\forall y \forall x \Big(\neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x)) \supset x = y\Big) = \forall y \forall x \Big(G \supset H\Big)$

F_2: $\forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset \neg(leftof(x,y) \vee leftof(y,x))\Big) = \forall y \forall x \Big(F \supset G\Big)$

F_3: $\forall y \forall x \Big((cube(x) \wedge cube(y)) \supset y = x\Big)$

2. Justification

1	$\mathcal{F} \vdash \Big(F \supset G\Big)$	(séquent prouvé)
2	$\mathcal{F} \vdash \Big(G \supset H\Big)$	(séquent prouvé)
3	$\mathcal{F}, F \vdash \Big(F \supset G\Big)$	(augmentation)
4	$\mathcal{F}, F \vdash \Big(G \supset H\Big)$	(augmentation)
5	$\mathcal{F}, F \vdash F$	(hypothèse)
6	$\mathcal{F}, F \vdash G$	(MP sur 5 et 3)
7	$\mathcal{F}, F \vdash H$	(MP sur 6 et 4)
8	$\mathcal{F} \vdash \Big(F \supset H\Big)$	(Synthèse)

3. La forme clausale de $F_1, F_2, \neg F_3$ est (sans les $\forall$)

$leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$, $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$, $cube(a)$, $cube(b)$, $\neg(a = b)$

3.1) De $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(x,y)$ et $cube(a)$ on déduit $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a,y)$

De $\neg cube(y) \vee \neg leftof(a,y)$ et $cube(b)$ on déduit $\neg leftof(a,b)$

De même on déduit de $\neg cube(x) \vee \neg cube(y) \vee \neg leftof(y,x)$ et $cube(a)$, $cube(b)$, que $\neg leftof(b,a)$

puis de $\neg leftof(b,a)$, $\neg leftof(a,b)$, $leftof(x,y) \vee leftof(y,x) \vee x = y$, $\neg(a = b)$ on déduit la clause vide.

3.2)

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset G \right) \quad \text{(hypothèse)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset G \right) \quad \text{(instantiation , } y \text{ substituable à } y\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset G \right) \quad \text{(instantiation , } x \text{ substituable à } x\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(G \supset H \right) \quad \text{(hypothèse)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(G \supset H \right) \quad \text{(instantiation , } y \text{ substituable à } y\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(G \supset H \right) \quad \text{(instantiation , } x \text{ substituable à } x\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \left(F \supset H \right) \quad \text{(question 2 , Exercice 4)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall x \left(F \supset H \right) \quad \text{(généralisation universelle car } x \text{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\text{)}$$

$$\{F_1, F_2\} \vdash \forall y \forall x \left(F \supset H \right) \quad \text{(généralisation universelle car } y \text{ non libre dans } \{F_1, F_2\}\text{)}$$

or $\forall y \forall x \left(F \supset H \right)$ est F_3.