Preuves et Calculs

λ-calcul non typé

Exercice 1 Calculer $(y\ (\lambda v.(x\ v)))[x := \lambda y.(v\ y)]$.

Exercice 2 On définit les λ-termes suivants :

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{T} \triangleq \lambda x.\lambda y.x & \boldsymbol{F} \triangleq \lambda x.\lambda y.y & \boldsymbol{If} \triangleq \lambda b.\lambda x.\lambda y.((b\ x)\ y) \\ \boldsymbol{And} \triangleq \lambda x.\lambda y.((x\ y)\ \boldsymbol{F}) & \boldsymbol{Or} \triangleq \lambda x.\lambda y.((x\ \boldsymbol{T})\ y) & \end{array}$$

Montrer que : $\begin{array}{lll} \boldsymbol{If}\ \boldsymbol{T}\ x\ y \to_\beta^\star x & \boldsymbol{If}\ \boldsymbol{F}\ x\ y \to_\beta^\star y & \boldsymbol{And}\ \boldsymbol{T}\ y \to_\beta^\star y \\ \boldsymbol{And}\ \boldsymbol{F}\ y \to_\beta^\star \boldsymbol{F} & \boldsymbol{Or}\ \boldsymbol{T}\ y \to_\beta^\star \boldsymbol{T} & \boldsymbol{Or}\ \boldsymbol{F}\ y \to_\beta^\star y \end{array}$.
A-t-on $\boldsymbol{And}\ x\ \boldsymbol{F} \to_\beta^\star \boldsymbol{F}$?

Exercice 3 Un combinateur de point fixe t est un λ-terme clos (i.e., un λ-terme ne contenant pas de variables libres) tel que pour tout λ-terme t', $(t\ t') =_\beta (t'\ (t\ t'))$.

1. Montrer que le terme $\boldsymbol{Y}$ de Curry défini par :

$$\boldsymbol{Y} \triangleq \lambda f.((\lambda x.(f\ (x\ x)))\ (\lambda x.(f\ (x\ x))))$$

   est un combinateur de point fixe.

2. Montrer que le terme $((\lambda z.\lambda x.(x\ (z\ z\ x)))\ (\lambda z.\lambda x.(x\ (z\ z\ x))))$ est un combinateur de point fixe.

Exercice 4
A-t-on $((\lambda z.z)\ (\lambda x.(y\ x))) =_\alpha ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ x)))$? $\lambda z.\lambda x.(z\ \lambda z.x) =_\alpha \lambda y.\lambda z.(y\ \lambda y.z)$?

Exercice 5 A tout λ-terme $t \in \Lambda$, on associe un entier $\tau(t)$ correspondant à la taille de t. La fonction τ est définie comme suit :

$$\tau : \Lambda \to \mathbb{N} \qquad \tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 + \tau(t_1) + \tau(t_2) & \text{si } t = (t_1\ t_2) \\ 1 + \tau(t_0) & \text{si } t = \lambda x.t_0 \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose, dans cet exercice, que l'on applique une substitution $[x := t']$ à un terme t uniquement lorsque les variables liées de t ont été renommées "en dehors" des variables libres de t'.

1. Montrer que renommer une variable dans un terme ne modifie pas la taille de ce terme. Plus formellement, montrer, par induction sur t, que :

$$\forall t \in \Lambda \quad \forall x, y \in V \quad \tau(t) = \tau(t[x := y])$$

2. Montrer que deux termes α-équivalents ont la même taille. Plus formellement, montrer, par induction sur (l'arbre d'inférence de) $t_1 =_\alpha t_2$, que :

$$\forall t_1, t_2 \in \Lambda \quad t_1 =_\alpha t_2 \Rightarrow \tau(t_1) = \tau(t_2)$$

Exercice 6 Les λ-termes $\boldsymbol{Y}$ (défini dans l'exercice 3) et $\lambda f.\lambda g.\lambda x.(f\ (g\ x))$ sont-ils typables ? Si oui, donner leur type.

Exercice 7 Les entiers peuvent être représentés en λ-calcul par des itérateurs de fonction. Cette méthode, due à Church, consiste à "coder" un entier n en un terme, noté $\underline{n}$, et défini comme suit :

$$\underline{n} \stackrel{\triangle}{=} \lambda f.\lambda x.\underbrace{(f\ (f\ (\cdots (f\ x))))}_{n \text{ applications}} = \lambda f.\lambda x.(f^n\ x)$$

1. Quel est le type des termes $\underline{0}$, $\underline{1}$ et $\underline{2}$?
2. On définit la fonction successeur par $succ \stackrel{\triangle}{=} \lambda n.\lambda f.\lambda x.((n\ f)\ (f\ x))$.
   (a) Typer $succ$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (succ\ \underline{n}) =_\beta \underline{n+1}$.
3. Montrer, par récurrence sur n, que le type de $\underline{n}$ est $(A \to A) \to A \to A$ où A est n'importe quel type.

Logique minimale propositionnelle

Exercice 8 Construire un arbre de preuve sans coupure de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$ et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 9

1. Construire un arbre de preuve D_1 sans coupure de

$$\varphi_1 \stackrel{\triangle}{=} (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

   Donner le λ-terme t_1 correspondant à cette preuve.
2. Construire un arbre de preuve D_2 sans coupure de

$$\varphi_2 \stackrel{\triangle}{=} (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

   Donner le λ-terme t_2 correspondant à cette preuve.
3. Soit t le λ-terme défini par $t \stackrel{\triangle}{=} \lambda w.(t_1\ (t_2\ w))$.
   (a) Typer le λ-terme t et construire l'arbre de preuve D correspondant à t.
   (b) Construire un arbre de preuve D' en éliminant les coupures de D.
   (c) Soit t' le λ-terme correspondant à la forme normale de t. Calculer t' et vérifier que l'arbre de preuve D' correspond à t'.

Conjonction/Produit de types

Exercice 10
Construire un arbre de preuve sans coupure de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$ et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 11 Typer le λ-terme $\lambda x.\lambda y.((x\ \mathsf{fst}(y))\ \mathsf{snd}(y))$ et construire l'arbre de preuve lui correspondant.

Exercice 12 On considère l'arbre de preuve D suivant :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \wedge B$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$\underbrace{A \wedge B, A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B}_{\Gamma} \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash (A \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$C, A, A \wedge B \vdash A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A, A \wedge B \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge B$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$A \wedge B \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\end{prooftree}
$$

1. Quelles sont les règles utilisées dans cette preuve ? Remplacer les "?" par les noms de règle.

2. Cette preuve contient au moins une coupure. Indiquer clairement ou elle se situe.

3. Eliminer les coupures de D en expliquant pour chaque étape les différentes transformations que vous effectuez sur l'arbre (attention, l'élimination d'une coupure peut en introduire une autre !). Soit D' l'arbre de preuve obtenu.

4. Construire le λ-terme t correspondant à D.

5. Normaliser le terme t. Quel est le type du terme obtenu ? Pourquoi ? A quelle preuve correspond il ? Pourquoi ?

Disjonction/Type somme

Exercice 13 Typer le λ-terme :

$$\lambda x.\mathsf{case}_{\tau,\tau}\ x \text{ of } \mathsf{inj}^l_{\tau,\tau}(x_1) \mapsto x_1 \mid \mathsf{inj}^r_{\tau,\tau}(x_2) \mapsto x_2$$

et construire l'arbre de preuve lui correspondant.

Exercice 14 Construire un arbre de preuve sans coupure de la formule :

$$(A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 15

1. Construire un arbre de preuve sans coupure de la formule :

$$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$$

   et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

2. Pourquoi la formule φ :

$$((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$$

n'est-elle pas prouvable ? On pourra expliquer le problème rencontré dans l'écriture d'un programme (i.e., d'un λ-terme) de type φ.

Exercice 16 Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R))$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 17 Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 18 Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$((P \wedge Q) \vee (P \vee Q)) \Rightarrow (P \vee Q)$$

et donner le λ-terme correspondant à cette preuve.

Exercice 19

1. Typer le λ-terme :

$$t_1 \stackrel{\triangle}{=} \lambda x.\mathsf{case}_{\tau_2,\tau_3}\ \mathsf{snd}(x)\ \mathsf{of}\quad \begin{array}{ll} & \mathsf{inj}^l_{\tau_2,\tau_3}(x_1) \mapsto \mathsf{inj}^l_{\tau_1\times\tau_2,\tau_1\times\tau_3}(\mathsf{fst}(x), x_1) \\ | & \mathsf{inj}^r_{\tau_2,\tau_3}(x_2) \mapsto \mathsf{inj}^r_{\tau_1\times\tau_2,\tau_1\times\tau_3}(\mathsf{fst}(x), x_2) \end{array}$$

et construire l'arbre de preuve D_1 lui correspondant.

2. Construire un arbre de preuve D_2 sans coupure de

$$\varphi_2 \stackrel{\triangle}{=} ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))$$

Donner le λ-terme t_2 correspondant à cette preuve.

3. Construire un arbre de preuve D_3 sans coupure de

$$\varphi_3 \stackrel{\triangle}{=} A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$$

Donner le λ-terme t_3 correspondant à cette preuve.

4. Soit t le λ-terme défini par $t \stackrel{\triangle}{=} \lambda w.\mathsf{fst}((t_2\ (t_1\ (t_3\ w))))$.

   (a) Typer le λ-terme t et construire l'arbre de preuve D correspondant à t.

   (b) Construire un arbre de preuve D' en éliminant les coupures de D.

   (c) Soit t' le λ-terme correspondant à la forme normale de t. Calculer t' et vérifier que l'arbre de preuve D' correspond à t'.

Exercice 20

1. Construire 3 preuves différentes du séquent $\vdash A \Rightarrow ((A \vee A) \vee A)$ et donner les 3 λ-termes t_1, t_2 et t_3 correspondant à ces preuves.

2. Typer le λ-terme :

$$t_4 = \lambda x.\mathsf{case}_{A+A,A}\ x\ \mathsf{of}\quad \begin{array}{l} \mathsf{inj}^l_{A+A,A}(x_1) \mapsto \left(\begin{array}{ll} \mathsf{case}_{A,A}\ x_1\ \mathsf{of} & \mathsf{inj}^l_{A,A}(y_1) \mapsto y_1 \\ & \mid\ \mathsf{inj}^l_{A,A}(y_2) \mapsto y_2 \end{array} \right) \\ \mid\ \mathsf{inj}^r_{A+A,A}(x_2) \mapsto x_2 \end{array}$$

3. Soit t_5 le λ-terme $t_5 = \lambda w.(t_4\ (t_1\ w))$.
   (a) De quelle proposition le λ-terme t_5 est-il une preuve ? Pourquoi ? Construire cette preuve. Admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, indiquer clairement ou se situe une coupure dans cette preuve.
   (b) Soit t_6 la forme normale du λ-terme t_5. Calculer t_6.
   (c) De quelle proposition le λ-terme t_6 est-il une preuve ? Pourquoi ? Cette preuve contient-elle une coupure ? Pourquoi ?

4. Parmi les λ-termes de l'ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ quels sont ceux qui :
   (a) sont α-équivalents ?
   (b) sont β-équivalents ?
   (c) sont en forme normale ?

Exercice 21

1. Trouver une formule φ de la logique des propositions telle que les séquents :

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow \varphi \qquad \vdash \varphi \Rightarrow (A \vee B)$$

   soient prouvables. Construire ces preuves et les λ-termes correspondants.

2. Utiliser les 2 λ-termes de la question précédente pour construire un λ-terme t correspondant à une preuve avec coupure. Indiquer clairement cette coupure sur l'arbre de preuve.

3. Quel est le type de la forme normale de t ? Pourquoi ?

Exercice 22

1. Qu'est ce qu'un radical ? Qu'est ce que la normalisation ?

2. Donner un exemple de λ-terme t (**non déja vu en cours/TD/TME**) contenant au moins un radical.

3. A quelle preuve π correspond le λ-terme t ?

4. Cette preuve admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, construire une preuve π' en éliminant la(les) coupure(s) de π.

5. Calculer la forme normale t' de t.

6. A quelle preuve correspond t' ? Pourquoi ?