CHAPITRE 2

GRAPHES ET ARBRES

Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines, par exemple :

- la gestion de réseaux,
- le routage dans des circuits VLSI ou les problèmes de routages généraux et de recherche de plus courts chemins,
- les problèmes d'ordonnancement de tâches dans des systèmes parallèles,
- enfin, d'un point de vue plus théorique, nombre de structures de données peuvent être modélisées par des graphes.

Ce chapitre donne les définitions de base pour les graphes orientés et non orientés, illustrées par la preuve du célèbre théorème d'Euler. La notion d'"arbre", probablement l'une des notions les plus utiles pour un informaticien, peut être vue comme un cas particulier de graphe ; nous étudierons aussi les arbres dans ce chapitre.

C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 2e édition, Paris (1973).

K. Ross, C. Wright, *Discrete Mathematics*, Prentice-Hall, Londres (1988).

2.1 Les graphes

2.1.1 Définitions

Nous définissons deux sortes de graphes, les graphes orientés et les graphes non orientés.

Définition 2.1 *Un graphe orienté est un quadruplet* (S, A, α, β) *où*

- S *est un ensemble de sommets, non nécessairement fini,*
- A *est un ensemble d'arêtes, disjoint de* S*,*
- α *et* β *sont deux applications de* A *dans* S *qui à chaque arête* a *associent son sommet origine* $\alpha(a)$ *et son sommet but* $\beta(a)$*.*

Le fait qu'une arête a une origine et un but permet d'orienter cette arête. Son sens normal de parcours sera de son origine vers son but. Plusieurs arêtes peuvent avoir la même origine et la même extrémité ; c'est pourquoi ces graphes sont parfois appelés des multigraphes.

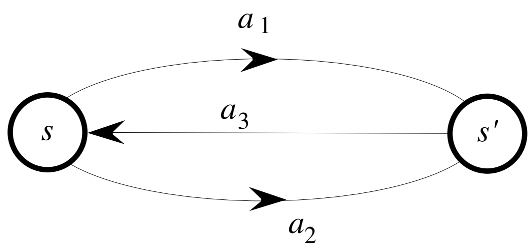

FIGURE 2.1 Graphe orienté à deux sommets et trois arêtes

EXEMPLE 2.2 La figure 2.1 représente un graphe orienté à deux sommets, s et s', et trois arêtes, a_1, a_2 et a_3, avec

$$\alpha(a_1) = \alpha(a_2) = s,$$
$$\beta(a_1) = \beta(a_2) = s',$$
$$\alpha(a_3) = s',$$
$$\beta(a_3) = s.$$

a_1 et a_2 ont même origine et même extrémité.

Définition 2.3 *Un graphe non orienté est un graphe dans lequel on ne peut pas distinguer l'origine et le but d'une arête. C'est un triplet (S, A, δ) où δ associe à chaque arête deux sommets non nécessairement distincts.*

EXEMPLE 2.4

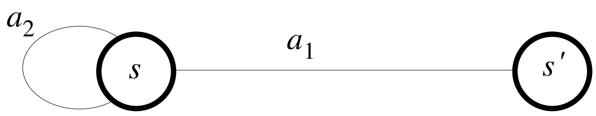

FIGURE 2.2 Graphe non orienté à deux sommets et deux arêtes

La figure 2.2 est un graphe non orienté à deux sommets, s et s', et deux arêtes, a_1 et a_2, avec

$$\delta(a_1) = \{s, s'\},$$
$$\delta(a_2) = \{s\}.$$

Un graphe (orienté ou non orienté) est dit *fini* s'il a un nombre fini de sommets et d'arêtes, *i.e.* si les deux ensembles S et A sont finis.

On peut toujours transformer un graphe orienté en un graphe non orienté en "oubliant" le sens des arêtes : si $G = (S, A, \alpha, \beta)$ est un graphe orienté, (S, A, δ), où $\delta(a) = \{\alpha(a), \beta(a)\}$ est un graphe non orienté, qu'on notera $\gamma(G)$.

Réciproquement, si un graphe est non orienté, on peut l'orienter en donnant un sens arbitraire à chacune de ses arêtes :

- si $\delta(a) = \{s\}$, alors $\alpha(a) = s = \beta(a)$,
- si $\delta(a) = \{s, s'\}$, avec $s \neq s'$, alors on peut prendre ($\alpha(a) = s$ et $\beta(a) = s'$) ou ($\alpha(a) = s'$ et $\beta(a) = s$).

Bien évidemment, il n'y a donc pas une façon unique d'orienter un graphe.

Définition 2.5 *Si G est un graphe non orienté, un graphe orienté G' est une orientation de G si $\gamma(G') = G$.*

EXEMPLE 2.6 Le k-cube est le graphe dont les sommets sont étiquetés par les suites de k lettres prises dans $\{0, 1\}$, deux sommets étant reliés par une arête si et seulement si ils ne diffèrent que par une seule lettre.

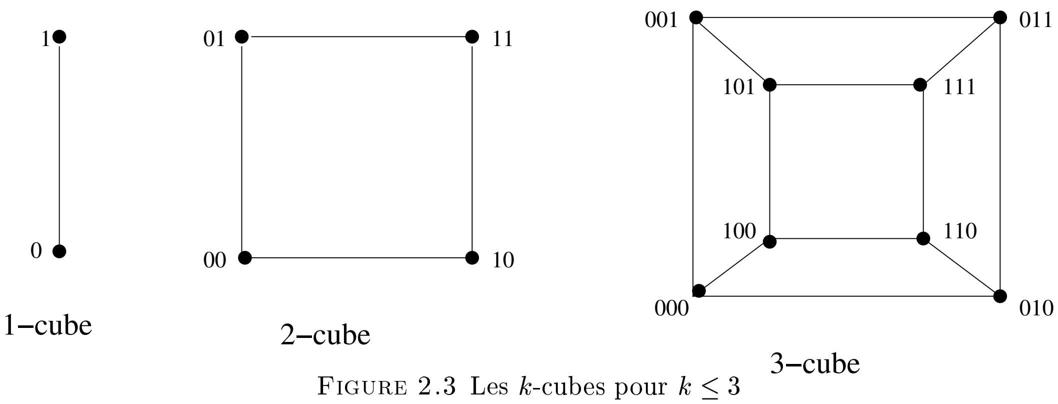

FIGURE 2.3 Les k-cubes pour $k \leq 3$

La figure 2.3 donne les k-cubes pour $k = 1, 2, 3$.

Un graphe non orienté est dit *biparti* s'il existe une partition de l'ensemble S des sommets en $S = S_1 \oplus S_2$ telle qe pour toute arête a, si $\delta(a) = \{s, s'\}$ alors on a : $s \neq s'$ et $s \in S_i \implies s \in S_{3-i}$, c'est-à-dire qu'aucune arête ne joint deux sommets appartenant au même S_i.

2.1.2 Graphes isomorphes

Dans certains cas, le nom particulier donné à un sommet ou à une arête d'un graphe n'a pas vraiment d'importance et on peut considérer que deux graphes qui ne diffèrent que par les noms de leurs sommets et de leurs arêtes sont en fait identiques. C'est la notion d'*isomorphisme* qui permet d'exprimer formellement cette idée.

Deux graphes orientés $G = (S, A, \alpha, \beta)$ et $G' = (S', A', \alpha', \beta')$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection $h_{som} : S \longrightarrow S'$ et une bijection $h_{ar} : A \longrightarrow A'$ telles que

$$\forall a \in A, \qquad \alpha'(h_{ar}(a)) = h_{som}(\alpha(a)) \text{ et } \beta'(h_{ar}(a)) = h_{som}(\beta(a)).$$

Deux graphes non orientés $G = (S, A, \delta)$ et $G' = (S', A', \delta')$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection $h_{som} : S \longrightarrow S'$ et une bijection $h_{ar} : A \longrightarrow A'$ telles que

$$\forall a \in A, \qquad \delta'(h_{ar}(a)) = \begin{cases} \{h_{som}(s)\} & \text{si } \delta(a) = \{s\}, \\ \{h_{som}(s), h_{som}(s')\} & \text{si } \delta(a) = \{s, s'\}, \end{cases}$$

L'union disjointe de deux graphes G' et G'' (orientés ou non orientés) dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement S', A' et S'', A'', disjoints deux à deux, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $S' \cup S''$, l'ensemble des arêtes est $A' \cup A''$, et le lien entre les arêtes et les sommets est celui qui existait dans les graphes G' et G''.

Dans certains cas où l'on veut construire l'union disjointe de deux graphes alors que leurs ensembles de sommets et d'arêtes ne sont pas disjoints, on pourra quand même construire cette union disjointe en remplaçant un des deux graphes par un graphe qui lui est isomorphe.

2.1.3 Graphes simples

Dans un graphe, orienté ou non orienté, on appelle *boucle* une arête a dont les deux extrémités sont égales. Pour un graphe orienté ceci s'énonce formellement : $\alpha(a) = \beta(a)$, et pour un graphe non orienté : $\delta(a)$ est un singleton.

On dira qu'un graphe orienté ou non orienté contient des *arêtes doubles* s'il a plusieurs arêtes de mêmes extrémités, c'est-à-dire : $\alpha(a) = \alpha(a')$ et $\beta(a) = \beta(a')$ pour les graphes orientés, et $\delta(a) = \delta(a')$ pour les graphes non orientés.

Si un graphe orienté $G = (S, A, \alpha, \beta)$ n'a pas d'arêtes doubles, on peut identifier l'ensemble A de ses arêtes à une partie du produit cartésien $S \times S$. En effet, dans ce cas, l'application $(\alpha, \beta) : A \longrightarrow S \times S$ est injective.

Un graphe, orienté ou non orienté, est dit *simple* s'il ne contient ni boucles ni arêtes doubles. Si un graphe non orienté $G = (S, A, \delta)$ est simple, on peut identifier l'ensemble de ses arêtes à une partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(S)$ des parties de S à deux éléments. En effet, puisque G est sans boucles, pour toute arête a, $\delta(a)$ a deux éléments, et puisque G est sans arêtes doubles, l'application $\delta : A \longrightarrow \mathcal{P}_2(S)$ est injective.

Proposition 2.7 *Soit $G = (S, A, \delta)$ un graphe simple, et posons $a = |A|$, $s = |S|$; si G est orienté, alors $a \leq s(s-1)$ et si G est non orienté, alors $a \leq \dfrac{s(s-1)}{2}$.*

2.1.4 Sous-graphes et graphes partiels

Intuitivement, on obtient un graphe partiel d'un graphe G en lui retirant des arêtes, et on obtient un sous-graphe de G en lui retirant des sommets, ainsi que toutes les arêtes dont ces sommets sont des extrémités.

Soit $G = (S, A, \alpha, \beta)$ un graphe orienté. Le graphe orienté $G' = (S', A', \alpha', \beta')$ est un *graphe partiel* de G si

- $S' = S$,
- $A' \subseteq A$ et
- $\forall a \in A', \quad \alpha'(a) = \alpha(a)$ et $\beta'(a) = \beta(a)$.

C'est un *sous-graphe* de G si

- $S' \subseteq S$,
- $A' = \{a \in A \,/\, \{\alpha(a), \beta(a)\} \subseteq S'\}$,
- $\forall a \in A', \quad \alpha'(a) = \alpha(a)$ et $\beta'(a) = \beta(a)$.

C'est un *sous-graphe partiel* si c'est un sous-graphe d'un graphe partiel.

Soit $G = (S, A, \delta)$ et $G' = (S', A', \delta')$ des graphes non orientés. Le graphe non orienté $G' = (S', A', \delta')$ est un graphe partiel de G si $S' = S$, $A' \subseteq A$ et $\forall a \in A'$, $\delta'(a) = \delta(a)$. C'est un sous-graphe de G si $S' \subseteq S$, $A' = \{a \in A \,/\, \delta(a) \subseteq S'\}$ et $\forall a \in A', \delta'(a) = \delta(a)$. C'est un sous-graphe partiel si c'est un sous-graphe d'un graphe partiel.

Exercice 2.1 Montrer qu'un graphe G' est un sous-graphe partiel de G si et seulement si c'est un graphe partiel d'un sous-graphe de G. Montrer qu'un sous-graphe et un graphe partiel d'un sous-graphe partiel de G sont encore des sous-graphes partiels de G. ♢

2.1.5 Degré d'un sommet

Z Dans la présente sous-section, nous considèrerons uniquement des graphes tels que, pour chaque sommet, le nombre d'arêtes qui aboutissent à ce sommet ou partent de ce sommet soit fini ; tous les graphes finis satisfont évidemment à cette condition.

Le *degré* $d(s)$ d'un sommet s d'un graphe non orienté $G = (S, A, \delta)$ est égal au nombre d'arêtes a telles que $s \in \delta(a)$. Si $\delta(a) = \{s\}$, l'arête a sera comptée deux fois dans le degré de s ! Le degré $d(s)$ d'un sommet s d'un graphe orienté est égal au nombre d'arêtes a telles que $s = \alpha(a)$ ou $s = \beta(a)$ (si $\alpha(a) = \beta(a)$, l'arête a est comptée deux fois) : en d'autres termes, le degré d'un sommet est la somme du nombre d'arêtes entrantes et du nombre d'arêtes sortantes. Le *degré entrant* $d^-(s)$ d'un sommet s d'un graphe orienté G est égal au nombre d'arêtes a telles que $\beta(a) = s$. Le *degré sortant* $d^+(s)$ est égal au nombre d'arêtes a telles que $\alpha(a) = s$. On a donc, pour un graphe orienté, $d(s) = d^+(s) + d^-(s)$.

Proposition 2.8 *La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe non orienté fini est égale à deux fois le nombre de ses arêtes.*

Démonstration. Chaque arête a compte pour 1 dans le degré de s et de s' si $\delta(a) = \{s, s'\}$ avec $s \neq s'$, et compte pour 2 dans le degré de s si $\delta(a) = \{s\}$. Chaque arête compte donc pour 2 dans la somme des degrés des sommets. □

Corollaire 2.9 *Dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.*

Définition 2.10 *Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k. Il est de degré minimum k tous ses sommets sont de degré $\geq k$.*

Exemple 2.11 Un cycle est 2-régulier, la n-clique est un graphe $(n-1)$-régulier, le graphe de Petersen est un graphe 3-régulier.

Exercice 2.2 Montrer que dans un graphe orienté fini, la somme des degrés entrants de tous les sommets est égale à celle des degrés sortants de ces sommets. A quel autre nombre est-elle égale ? ◊

Exercice 2.3 Soit G un graphe non orienté fini ayant n sommets et m arêtes, où $n \geq 1$ et $m \geq 0$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit n_k le nombre de sommets de degré k ; soit K le maximum des degrés des sommets (c'est-à-dire $n_K > 0$ et $n_k = 0$ pour $k > K$).

1) Montrer que
$$\sum_{k=0}^{K} k n_k = 2m \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{K} n_k = n.$$

2) Montrer que $K \leq 2m$; donner un exemple où on a l'égalité.

3) Montrer que si G ne possède ni boucles ni arêtes multiples, alors $K \leq n - 1$; donner un exemple où on a l'égalité. ◊

Exercice 2.4 Soit G un graphe simple non orienté fini ayant n sommets ($n > 1$).

1) Montrer que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n.

2) Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$.

3) En déduire qu'il y a au moins deux sommets de même degré. ◊

EXERCICE 2.5 Soit $G = (S, A, \delta)$ un graphe simple non orienté fini. Supposons que G ne contienne pas de *triangles* : un triangle est formé de trois sommets distincts $s_1, s_2, s_3 \in S$ et trois arêtes $a_1, a_2, a_3 \in A$ avec $\delta(a_1) = \{s_2, s_3\}$, $\delta(a_2) = \{s_1, s_3\}$, et $\delta(a_3) = \{s_1, s_2\}$.

1) Montrer que pour deux sommets adjacents distincts x et y, le nombre n_x de sommets de $S \setminus \{x, y\}$ adjacents à x et le nombre n_y de sommets de $S \setminus \{x, y\}$ adjacents à y satisfont l'inégalité
$$n_x + n_y \leq |S| - 2.$$

2) En déduire, par induction sur le nombre $|S|$ de sommets, que le nombre $|A|$ d'arêtes vérifie
$$|A| \leq \frac{|S|^2}{4}.$$ ◊

2.1.6 Chemins et chaînes

Dans un graphe orienté G, un *chemin* est une suite $c = a_1, \ldots, a_n$ d'arêtes telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\beta(a_i) = \alpha(a_{i+1})$. Le sommet $\alpha(a_1)$ sera appelé l'*origine* du chemin c et le sommet $\beta(a_n)$ sera appelé son *but*. Un *circuit* est un chemin tel que $\beta(a_n) = \alpha(a_1)$. Un chemin (ou un circuit) est *simple* s'il ne contient pas deux fois la même arête. Il est *élémentaire* s'il ne contient pas deux arêtes de même origine ou de même but (il est donc *a fortiori* simple). Dans un graphe orienté fini, un chemin ou circuit est *eulérien* s'il est simple et s'il contient toutes les arêtes. Il est *hamiltonien* s'il est élémentaire et passe par tous les sommets (c'est-à-dire $\forall s \in S$, $\exists i : s = \alpha(a_i)$ ou $s = \beta(a_i)$).

Pour les graphes non orientés, une *chaîne* est une suite
$$c = s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$$
de sommets et d'arêtes telle que $\delta(a_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$. On dira que cette chaîne joint les sommets s_0 et s_n. Un *cycle* est une chaîne telle que $s_0 = s_n$. Si la chaîne $s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$ joint s_0 et s_n, la suite $s_n, a_n, s_{n-1}, \ldots, a_2, s_1, a_1, s_0$ est encore un chaîne qui joint s_n à s_0. Une chaîne (ou un cycle) est *simple* si elle ne contient pas deux fois la même arête et *élémentaire* si elle ne contient pas deux fois le même sommet, avec la seule exception que s_0 et s_n peuvent être égaux. Dans un graphe non orienté fini, une chaîne (ou un cycle) est *eulérienne* si elle est simple et contient toutes les arêtes ; elle est *hamiltonienne* si elle est élémentaire et contient tous les sommets.

Un graphe non orienté fini est dit *eulérien* (resp. *semi-eulérien*) s'il contient un cycle (resp. une chaîne) eulérien(ne) ; il est dit *hamiltonien* (resp. *semi-hamiltonien*) s'il contient un cycle (resp. une chaîne) hamiltonien(ne).

EXEMPLE 2.12 1) Dans le graphe de la figure 2.4

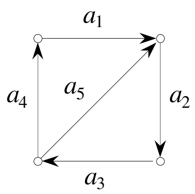

FIGURE 2.4

- $a_1a_2a_3a_4$ est un circuit simple,
- $a_4a_1a_2a_3a_5$ est un chemin eulérien mais non hamiltonien.

2) Dans le graphe orienté de l'exemple 2.2 (figure 2.1)

- $a_1 a_3$ est un circuit simple, non eulérien, hamiltonien,
- $a_1 a_3 a_2$ est un chemin eulérien, non élémentaire.

3) Dans le graphe non orienté de l'exemple 2.4 (figure 2.2)

- s, a_2, s est un cycle élémentaire,
- s, a_2, s, a_1, s' est une chaîne simple, non élémentaire, eulérienne,
- $s', a_1, s, a_2, s, a_1, s'$ est un cycle non simple.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions.

Proposition 2.13 *Si $a_1, \ldots, a_n$ est un chemin (circuit, simple, élémentaire, eulérien, hamiltonien) d'un graphe orienté G alors*

$$\alpha(a_1), a_1, \alpha(a_2), a_2, \ldots, \alpha(a_n), a_n, \beta(a_n)$$

est une chaîne (cycle, simple, élémentaire, eulérienne, hamiltonienne) de $\gamma(G)$.

Réciproquement, si $s_0, a_1, \ldots, a_n, s_n$ est une chaîne simple, il existe une orientation de G telle que $a_1, \ldots, a_n$ soit un chemin : puisque $\delta(a_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$, il suffit de prendre $\alpha(a_i) = s_{i-1}$ et $\beta(a_i) = s_i$. Le fait que la chaîne soit simple garantit que cette construction est toujours possible puisqu'il n'existe pas d'indice $j \neq i$ avec $a_j = a_i$. En effet si on avait $a_i = a_j = a$, on aurait $\delta(a) = \{s_{i-1}, s_i\} = \{s_{j-1}, s_j\}$; et il est facile de voir qu'on ne peut appliquer la construction ci-dessus que si $\alpha(a) = s_{i-1} = s_{j-1}$ et $\beta(a) = s_i = s_j$.

Proposition 2.14 *Si un graphe non orienté G contient deux chaînes simples différentes joignant deux sommets distincts, alors il contient un cycle simple.*

Démonstration. Soient $c = s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$ et $c' = s'_0, a'_1, s'_1, \ldots, s'_{n'-1}, a'_{n'}, s'_{n'}$ deux chaînes simples telles que $s_0 = s'_0 \neq s_n = s'_{n'}$. On va montrer par induction sur $n + n'$ que l'existence de telles chaînes implique l'existence d'un cycle simple.

1) Comme $n \geq 1$ (puisque $s_0 \neq s_n$) et $n' \geq 1$ (pour les mêmes raisons), la plus petite valeur possible de $n + n'$ est 2. Dans ce cas, $c = s, a, s'$, $c' = s, a', s'$, avec $a \neq a'$, et s, a, s', a', s est un cycle simple.

2) a) Si les ensembles $A(c) = \{a_i \,/\, 1 \leq i \leq n\}$ et $A(c') = \{a'_j \,/\, 1 \leq j \leq n'\}$ sont disjoints, alors $s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n = s'_{n'}, a'_{n'}, s'_{n'-1}, \ldots, s'_1, a'_1, s'_0$ est un cycle simple.

b) Si $a_1 = a'_1$, alors $s_1 = s'_1$, et il y a deux cas à considérer.

b.1) Si $n' = 1$ (le cas $n = 1$ est similaire), alors $s_n = s'_1 = s_1$ et $s_1, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$ est un cycle simple.

b.2) Sinon les deux chaînes $s_1, a_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$ et $s'_1, a'_2, \ldots, s'_{n'-1}, a'_{n'}, s'_{n'}$, de longueurs respectives $n-1$ et $n'-1$, vérifient encore les hypothèses, et donc G contient un cycle simple.

c) Il reste donc à examiner le cas où $A(c) \cap A(c') \neq \emptyset$ et où $a_1 \neq a'_1$. Il existe donc $i > 1$ et $j > 1$ tels que $a_i = a'_j$, d'où $s_{i-1} = s'_{j-1}$, ou $s_{i-1} = s'_j$. Dans le premier cas, les chaînes $s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{i-2}, a_{i-1}, s_{i-1}$ et $s'_0, a'_1, s'_1, \ldots, s'_{j-2}, a'_{j-1}, s'_{j-1}$ de longueurs respectives $i - 1 < n$ et $j - 1 < n'$ vérifient encore les hypothèses, et G

contient un cycle simple. Dans le second cas, les chaînes $s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{i-2}, a_{i-1}, s_{i-1}$ et $s'_0, a'_1, s'_1, \ldots, s'_{j-2}, a'_{j-1}, s'_{j-1}, a'_j, s'_j$ de longueurs respectives $i-1 < n$ et $j \leq n$ vérifient aussi les hypothèses et G contient un cycle simple. □

EXERCICE 2.6 Montrer que dans un graphe non-orienté, la chaîne la plus courte entre deux sommets distincts est élémentaire. En est-il de même pour le chemin le plus court d'un sommet vers un autre dans un graphe orienté ? ♢

Dans un graphe non orienté, la *distance* $d(s, s')$ entre deux sommets s et s' est égale à

- 0 si $s = s'$,
- sinon,
  - à la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets, si elle existe,
  - à ∞ sinon.

Les propriétés caractéristiques d'une distance sont bien vérifiées :

- $d(s, s') = 0$ si et seulement si $s = s'$,
- $d(s, s') = d(s', s)$,
- $d(s, s'') \leq d(s, s') + d(s', s'')$.

EXERCICE 2.7 Démontrer l'inégalité triangulaire $d(s, s'') \leq d(s, s') + d(s', s'')$. ♢

Le *diamètre* d'un graphe non orienté est le maximum des distances entre deux de ses points, c'est-à-dire $\sup\{d(s, s') \,/\, s, s' \in S\}$.

Si un graphe est orienté, on peut encore définir la distance entre deux sommets comme étant la longueur du plus court chemin allant du premier au second, mais ce n'est plus vraiment une distance au sens mathématique, car si elle satisfait encore l'inégalité triangulaire, elle n'est pas symétrique : on peut fort bien avoir $d(s, s') \neq d(s', s)$.

Proposition 2.15 *Si G (non-orienté) contient une chaîne c joignant s à s', alors G contient une chaîne élémentaire c' joignant s à s', de plus toutes les arêtes de c' sont des arêtes de c.*

Démonstration. Par induction sur le nombre de sommets répétés de c. □

Corollaire 2.16 *Soit c une chaîne joignant deux sommets s et s' d'un graphe non-orienté ; si c est de longueur $d(s, s')$ alors c est élémentaire.*

Démonstration. Voir l'exercice 2.6. □

Proposition 2.17 *Soit G un graphe simple non-orienté de degré minimum supérieur ou égal à k. Tout sommet de G est l'extrémité d'une chaîne élémentaire de longueur k.*

Démonstration. Par induction sur k. Base : si $k = 1$, c'est clair.

Induction : soit s_0 un sommet de G, s_0 est adjacent à au moins un autre sommet s_1, et il y a au moins arête a entre s_0 et s_1 ; soit G' le graphe simple obtenu en enlevant cette arête : G' est de degré minimum supérieur ou égal à $k-1$, par induction il y a donc une chaîne élémentaire c de longueur $k-1$ partant de s_1 ; s_0, a, c est alors une chaîne élémentaire de longueur k partant de s_0.

On peut remarquer qu'un graphe simple de degré minimum supérieur ou égal à k a au moins $k+1$ sommets. □

Proposition 2.18 *Soit G un graphe orienté (resp. non orienté) et s_i, s_j deux sommets de G : le nombre de chemins (resp. chaînes) de longueur l d'origine s_i et de but s_j (resp. joignant s_i et s_j) est le coefficient de rang (i, j) de la matrice M^l, où M est la matrice d'adjacence de G.*

Démonstration. Voir l'exercice 2.9. □

EXERCICE 2.8 Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le *graphe de Petersen* est le graphe non-orienté défini comme suit : ses sommets sont les paires d'éléments de X, et deux sommets sont joints par une arête si et seulement si ce sont deux paires disjointes d'éléments de X. Par exemple, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, et $\{2, 3\}$ sont des sommets, il y a une arête joignant $\{0, 1\}$ et $\{2, 3\}$, mais pas d'arête joignant $\{0, 1\}$ et $\{1, 2\}$.

1) Déterminer le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, le degré des sommets, et le diamètre de ce graphe.

2) Dessiner ce graphe en indiquant pour chaque sommet les deux éléments de X qu'il contient en tant que paire. ◇

EXERCICE 2.9 1) Soit (S, A, α, β) un graphe orienté ayant n sommets $s_1, \ldots, s_n$. On lui associe la matrice M dont chaque coefficient $M_{i,j}$ (où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) est le nombre d'arêtes dans A ayant s_i comme origine et s_j comme but (c'est-à-dire $\alpha(a) = s_i$ et $\beta(a) = s_j$). Montrer par induction que pour tout entier $k > 0$, la matrice M^k a pour coefficient en i, j le nombre de chemins distincts de longueur k entre s_i et s_j.

2) Peut-on généraliser ce résultat à un graphe non-orienté ? ◇

EXERCICE 2.10 Dans $\mathbb{Z}^2$ on définit la *4-distance* d_4 et la *8-distance* d_8 comme suit

$$d_4\big((x, y), (x', y')\big) = |x - x'| + |y - y'|;$$
$$d_8\big((x, y), (x', y')\big) = \max\big(|x - x'|, |y - y'|\big).$$

1) Définir les deux graphes non orientés G_4 et G_8 ayant $\mathbb{Z}^2$ comme ensemble de sommets, et où les distances définies plus haut en termes de longueurs de chaînes coincident avec d_4 et d_8 respectivement.

2) Dessiner les sous-graphes de G_4 et G_8 correspondant à l'ensemble des 16 sommets (x, y) où $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 3$. ◇

Théorème 2.19 *Soit G un graphe simple non orienté dont tous les sommets sont de degré $\geq k$, avec $k \geq 2$. G contient un cycle élémentaire de longueur $\geq k + 1$.*

Démonstration. Soit s_0 un sommet quelconque de S. G étant simple et de degré minimum $\geq k$, on peut construire une chaîne $c = s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, s_k, a_k, s_{k+1}, \ldots, a_n, s_n, \ldots$, telle que :

1) $\forall i \leq k, s_i \notin \{s_0, s_1, \ldots, s_{i-1}\}$, et

2) $\forall i \geq k, s_i \notin \{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_{i-k}\}$.

Comme G est fini, il y a un sommet répété dans cette chaîne, soit j l'indice du premier sommet répété, $s_j = s_{j+l}$; $c' = s_j, a_{j+1}, s_{j+1}, \ldots, s_{j+l}$ est un cycle élémentaire de longueur $\geq k + 1$: en effet, par la condition 1) $j + l \geq k$, et par la condition 2) s_{j+l} est différent de ses k prédécesseurs ce qui implique que c' soit de longueur $\geq k + 1$. □

2.1.7 Algorithme de Moore

L'*algorithme de Moore* a pour données un graphe non orienté $G = (S, A, \delta)$ et un sommet initial s_0 donné ; il calcule les distances entre le sommet s_0 donné et tous les autres sommets de G : le résultat de cet algorithme est d'étiqueter tout sommet s tel que $d(s, s_0) \neq \infty$ par $d(s, s_0)$. Pour ce faire, on a un indice courant k mesurant la distance à s_0.

1. Faire $k \Longleftarrow 0$.

2. s_0 est étiqueté avec k.

3. Trouver tous les sommets non encore étiquetés et adjacents à un sommet étiqueté k ; s'il n'y en a aucun, on a déjà atteint tous les sommets atteignables : l'algorithme s'arrête.

4. Sinon, on étiquette *tous* les sommets trouvés à l'étape 3 par $k + 1$.

5. On fait $k \Longleftarrow k+1$ et on retourne à l'étape 3 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien étiqueter.

La figure 2.5 illustre l'étiquetage obtenu sur deux graphes G et G' : G est le 2-cube, G' est un graphe ayant 3 composantes connexes (voir Section 2.1.9) et 8 sommets.

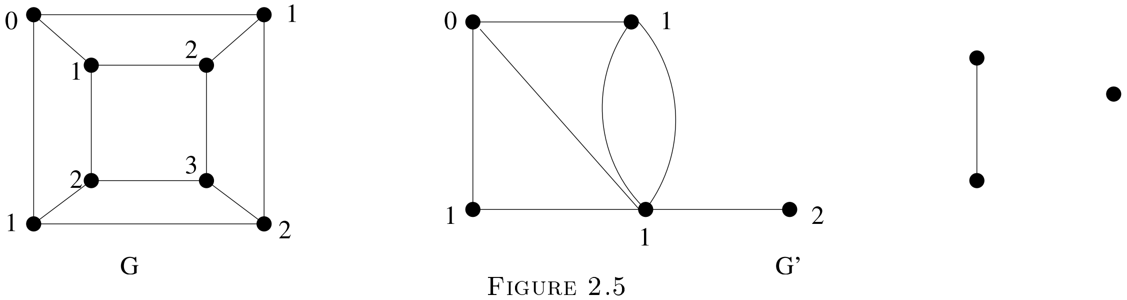

FIGURE 2.5

Démontrons que cet algorithme étiquette bien un sommet s par $d(s_0, s)$. Il est clair que si un sommet s est étiqueté k, il y a une chaîne de longueur k entre s et s_0 : donc $d(s_0, s) \leq k$. Montrons qu'on a $d(s_0, s) = k$ par induction sur $d(s_0, s)$. Si $d(s_0, s) = 0$ c'est clair. Supposons que si $d(s_0, s') < d(s_0, s)$ alors s' est étiqueté $k' = d(s_0, s')$. Soit s étiqueté k ; soit l la longueur de la plus courte chaîne de s_0 à s alors $l = d(s_0, s) \leq k$; soit $s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{l-1}, a_l, s$ la plus courte chaîne de s_0 à s, $s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{l-1}$ est donc aussi la plus courte chaîne de s_0 à s_{l-1}, donc $d(s_0, s_{l-1}) = l-1 < d(s_0, s)$ et par l'hypothèse d'induction, s_{l-1} est étiqueté $l-1$. Comme s est adjacent à s_{l-1}, s sera donc étiqueté l (s n'a pas pu être étiqueté avant s_{l-1} par une valeur $j < l$, car sinon, on aurait $d(s_0, s) = j < l$ et cela contredirait l'hypothèse $l = d(s_0, s)$).

La complexité en temps de cet algorithme est $\leq 2|A|$: en effet, chaque sommet est examiné au plus deux fois, une fois pour chaque extrémité d'arête ; la complexité pour calculer les distances de tous les sommets entre eux est donc $\leq 2|A| \times |S|$. L'algorithme de Moore fait partie des algorithmes appelés *en largeur* (ou *breadth-first*).

Remarquons que, si l'étiquetage est unique, le parcours dans les sommets de G pour réaliser l'étiquetage n'est pas unique : voir figure 2.6, où on illustre deux parcours différents dans un graphe donné.

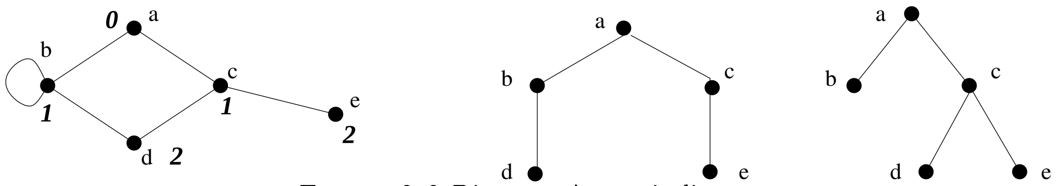

FIGURE 2.6 Distances à a en italiques

2.1.8 Algorithme de Dijsktra

L'*algorithme de Dijsktra* a pour données un graphe simple non orienté $G = (S, A, \delta)$ dont les arêtes ont des "poids" $p(a)$ et deux sommets s_0 (source) et s_f (but) donnés ; il calcule une chaîne de poids minimal du sommet s_0 au sommet s_f. Pour ce faire, on étiquette chaque sommet s_i avec un couple $(l(s_i), pred(s_i))$, qui pourra changer au cours de l'exécution de l'algorithme, et tel que $l(s_i)$ (resp. $pred(s_i)$) donne le poids minimal de la chaîne de s_0 à s_i (resp. le prédécesseur immédiat de s_i) trouvé à l'étape courante de l'algorithme. $Temp$ indique les sommets dont l'étiquette pourra changer.

1. Faire $l(s_0) \Longleftarrow 0$, et pour tout $s \neq s_0$, $l(s) \Longleftarrow \infty$, $Temp \Longleftarrow S$.

2. Choisir $s \in Temp$ d'étiquette $l(s)$ minimum. Si $s = s_f$, l'algorithme est fini.

3. Pour toute arête a avec $\delta(a) = \{s, s'\}$, avec $s' \in Temp$: si $l(s') > l(s) + p(a)$, faire $l(s') \Longleftarrow l(s) + p(a)$ et $pred(s') \Longleftarrow s$.

4. Faire $Temp \Longleftarrow (Temp \setminus \{s\})$ et aller à 2.

La complexité de cet algorithme est $\leq 4 \times |S| \times (|S| - 1)$ (car chaque sommet a au plus $|S| - 1$ voisins pour lesquels il faudra faire au plus 4 opérations). On peut modifier très légèrement cet algorithme pour calculer (avec la même complexité) un ensemble de chaînes de poids minimum entre s_0 et tous les autres sommets de G : il suffit de supprimer la condition d'arrêt de l'étape 2, et de la remplacer par une nouvelle condition d'arrêt à l'étape 4, qui est "si $Temp = \emptyset$ alors arrêt, sinon aller à 2".

2.1.9 Connexité

Un graphe orienté est *fortement connexe* si pour toute paire (s, s') de sommets distincts, il existe un chemin allant de s à s'.

Un graphe non orienté est *connexe* si pour toute paire (s, s') de sommets distincts, il existe une chaîne joignant s et s'. Un graphe fini sera connexe ssi son diamètre est fini.

La *composante connexe* $CC_G(s)$ d'un sommet s d'un graphe non orienté G est égale à $\{s\}$ plus l'ensemble des sommets s' de G tels qu'il existe une chaîne joignant s à s'. $CC_G(s)$ est la classe d'équivalence de s dans la relation $s \equiv s'$ si et seulement s'il existe une chaîne joignant s et s'.

Proposition 2.20 *Si $s' \in CC_G(s)$ alors $CC_G(s) = CC_G(s')$.*

Démonstration. On suppose que $s \neq s'$ (si $s = s'$, le résultat est trivial). Si $s' \in CC_G(s)$ il existe une chaîne c joignant s et s' et une chaîne c' joignant s' et s. Soit $s'' \in CC_G(s)$;

- si $s'' = s$, comme c' joint s' à s, $s'' = s \in CC_G(s')$,
- sinon il existe une chaîne c'' joignant s à s'' ; alors $c'c''$ est une chaîne joignant s' à s'', et $s'' \in CC_G(s')$.

Il en résulte que $CC_G(s) \subseteq CC_G(s')$. L'inclusion inverse $CC_G(s') \subseteq CC_G(s)$ se démontre de la même façon. □

Il découle immédiatement des définitions

Proposition 2.21 *Un graphe non orienté $G = (S, A, \delta)$ est connexe si et seulement si $\forall s \in S$, $S = CC_G(s)$.*

Les propriétés suivantes sont immédiates : chaque composante connexe est un graphe connexe ; les composantes connexes définissent une partition de S ; G est connexe ssi il a une seule composante connexe ; si G n'est pas connexe et si s, s' sont deux sommets appartenant à des composantes connexes distinctes, il n'y a pas dans G de chaîne joignant s' et s.

Théorème 2.22 *G est connexe si et seulement si pour toute partition $S = S' \oplus S''$ de S en deux ensembles non vides et disjoints S' et S'', il existe une arête ayant une extrémité dans S' et l'autre extrémité dans S''.*

Démonstration. Supposons G connexe, soit $S = S' \oplus S''$ une partition de S, et soit $s' \in S'$ et $s'' \in S''$; il existe une chaîne d'extrémités s', s'', soit $s' = s_0, a_1, s_1, \ldots, a_n, s_n = s''$. Soit i le premier indice tel que $s_{i-1} \in S'$ et $s_i \in S''$, alors a_i est une arête ayant une extrémité dans S' et l'autre extrémité dans S''.

Réciproquement, supposons que pour toute partition $S = S' \oplus S''$ avec S' et S'' non vides, il existe une arête ayant une extrémité dans S' et l'autre extrémité dans S'' et supposons G non connexe : soit CC' une composante connexe de G, S' l'ensemble des sommets de CC', et S'' l'ensemble de tous les autres sommets de G ; il existe une arête ayant une extrémité s' dans S' et l'autre extrémité s'' dans S'' : comme $CC' = CC_G(s')$ et que par hypothèse $s'' \notin CC'$, on a une contradiction ; G est donc connexe. □

Un sommet *isolé* est un sommet de degré 0. Si un sommet s de G est isolé, alors $CC_G(s) = \{s\}$. Si G est un graphe sans boucles, un sommet s de G est isolé si et seulement si $CC_G(s) = \{s\}$.

Proposition 2.23 *Soit G un graphe non orienté connexe. Soit G' le graphe partiel obtenu en retirant une arête a ayant ses deux extrémités s' et s'' distinctes (c'est-à-dire $\delta(a) = \{s', s''\}$ avec $s' \neq s''$). Alors $S = CC_{G'}(s') \cup CC_{G'}(s'')$.*

Démonstration. Soit s un sommet quelconque de G. Puisque G est connexe, il existe une chaîne $s_0, a_1, s_1, \ldots, a_n, s_n$ avec $s' = s_0$ et $s_n = s$. Si l'arête a ne figure pas dans cette chaîne, $s \in CC_{G'}(s')$. Sinon, soit i le plus grand indice tel que $a_i = a$. Alors $s_i \in \{s', s''\}$ et $s_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, s_n$ est une chaîne de G', d'où $s = s_n \in CC_{G'}(s'') \cup CC_{G'}(s')$. □

Un *isthme* (*cut-edge* ou *bridge*) d'un graphe non orienté G est une arête a telle que si on enlève a le graphe partiel obtenu a plus de composantes connexes que G. Plus généralement, un *ensemble de coupure (cut-set)* de G est un ensemble minimal d'arêtes A' telle que si on enlève A' le graphe partiel obtenu a plus de composantes connexes que G.

EXERCICE 2.11 Soit C_n un graphe non-orienté à n sommets constitué d'un seul cycle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, \ldots, s_n\}, \\ A &= \{a_1, \ldots, a_n\}, \\ \delta(a_i) &= \begin{cases} \{s_{i-1}, s_i\} & \text{si } i > 1, \\ \{s_n, s_1\} & \text{si } i = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1) Montrer que chaque sommet de C_n est de degré 2.

2) Montrer que si G est un graphe non orienté connexe à n sommets dont tous les sommets sont de degré 2, alors G est isomorphe à C_n.

3) Montrer que si G est un graphe non orienté à n sommets dont tous les sommets sont de degré 2, alors G est une union disjointe de graphes $G_{n_1}, \dots, G_{n_k}$, où G_{n_i} est isomorphe à C_{n_i}, avec $n_1 + \cdots + n_k = n$. ♢

Théorème 2.24 *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

Démonstration. Soit G un graphe biparti, $S = S_1 \oplus S_2$ la partition de S. Soit $c = s, a_1, s_1, a_2, s_2, \dots, s_n, a_{n+1}, s$ un cycle de G. Si par exemple $s \in S_2$, alors $s_1 \in S_1$, $\dots$, $s_{2i} \in S_2$, $s_{2i+1} \in S_1$, pour tout i : $n+1$ doit donc être pair pour que s puisse être dans S_2.

Inversement supposons que tout cycle de G est de longueur paire, et construisons par induction une partition $S = S_1 \oplus S_2$, telle que toute arête soit entre un sommet de S_1 et un sommet de S_2. Soit s_0 un sommet quelconque de S, posons $S_0 = \{s_0\}$ et soit S_1 l'ensemble des sommets adjacents à s_0 ; $S_1 \cap \{s_0\} = \emptyset$, en effet, sinon on aurait $s_0 \in S_1$ et donc il y aurait une boucle sur s_0, et donc un cycle de longueur impaire. Supposons par induction avoir construit $S_0, S_1, \dots, S_{2k}, S_{2k+1}$ tels que $S_0 \subset S_2 \subset \dots, S_{2k}$, $S_1 \subset S_3 \subset \dots, S_{2k+1}$, et :

1) tout sommet de S_{2i} est joint à s_0 par une chaîne de longueur paire, tout sommet de S_{2i+1} est joint à s_0 par une chaîne de longueur impaire, et

2) pour tout i, $S_{2i} \cap S_{2i+1} = \emptyset$.

Soit S' l'ensemble des sommets adjacents à un sommet de S_{2k+1}, posons $S_{2k+2} = S' \cup S_{2k}$. Il est clair qu'il y a une chaîne de longueur paire joignant tout sommet de S_{2k+2} à s_0 (condition 1)). Par ailleurs, $S_{2k+2} \cap S_{2k+1} = (S' \cup S_{2k}) \cap S_{2k+1} = (S' \cap S_{2k+1}) \cup (S_{2k} \cap S_{2k+1}) = (S' \cap S_{2k+1}) \cup \emptyset = S' \cap S_{2k+1}$: il suffit donc de vérifier que $S' \cap S_{2k+1} = \emptyset$, mais si tel n'était pas le cas, il y aurait dans S_{2k+1} deux sommets adjacents s, s' et une arête a telle que $\delta(a) = \{s, s'\}$; s, s' sont joints à s_0 par des chaînes c, c' de longueur impaire, et alors la chaîne formée de c, s, a, s', c' est un cycle de longueur impaire, contradiction.

On construit de même S_{2k+2}. Comme G et donc S sont finis, cette construction s'arrête en donnant la partition recherchée de S. □

Corollaire 2.25 *Un graphe biparti ayant un nombre impair de sommets n'est pas hamiltonien.*

2.1.10 Exemple historique : les sept ponts de Königsberg

Il y a sept ponts dans la vieille ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad, en Russie), qui contient une île en son milieu.

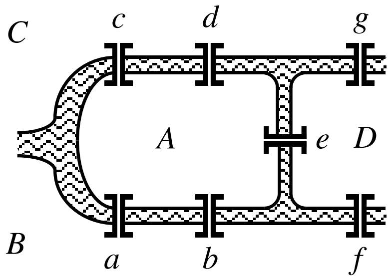

FIGURE 2.7 La rivière et les ponts à Königsberg

Un promeneur peut-il visiter Königsberg en traversant chaque pont une fois et une seule ?

Il s'agit de trouver une chaîne eulérienne dans le graphe non orienté de la figure 2.8

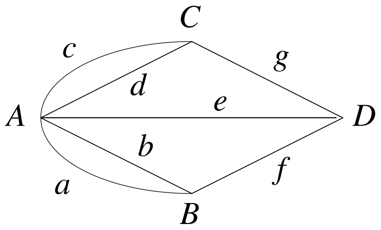

FIGURE 2.8 Le graphe des ponts de Königsberg

Si de plus le promeneur revient à son point de départ on aura un cycle eulérien.

La réponse à cette question s'obtient grâce au théorème suivant, dû à Euler (en 1766).

Théorème 2.26 *Un graphe non orienté fini G sans sommets isolés, possède une chaîne eulérienne si et seulement si*

(i) il est connexe

(ii) il a 0 ou 2 sommets de degré impair.

Dans le cas où il n'y a aucun sommet de degré impair, cette chaîne eulérienne est un cycle. Dans le cas où il y en a deux, ce sont les extrémités de la chaîne.

Démonstration. 1) Supposons qu'il existe une chaîne eulérienne $s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n$. Puisqu'il n'y a pas de sommets isolés,

$$S = \cup_{a \in A} \delta(a)$$

et comme $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$,

$$s \in S \Longleftrightarrow \exists i : s = s_i.$$

G est donc connexe.

– soit s un sommet quelconque ; le nombre $d(s)$ d'arêtes d'extrémité s est égal à

$$2 \times |\{i \,/\, s_i = s, 1 \leq i \leq n-1\}| \quad + \begin{cases} +1 \text{ si } s = s_0, \\ +1 \text{ si } s = s_n. \end{cases}$$

En effet pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $s = s_i$, s est l'extrémité des deux arêtes distinctes a_i et a_{i+1}. Si de plus $s = s_0$, il est aussi l'extrémité de l'arête a_1, et si $s = s_n$, il est l'extrémité de l'arête a_n. Remarquons que si on a une arête a_i dont les deux extrémités s_{i-1} et s_i sont égales, cette arête interviendra bien deux fois dans le calcul du degré de $s = s_{i-1} = s_i$, une fois parce que $s = s_{i-1}$ et une fois parce que $s = s_i$. On déduit de cette caractérisation des degrés des sommets :

- si $s_0 = s_n$, c'est-à-dire s'il y a un cycle eulérien, alors tous les sommets sont de degré pair,
- si $s_0 \neq s_n$ tous les sommets sont de degré pair, à l'exception des extrémités s_0 et s_n de la chaîne.

2) Soit un graphe connexe ayant 0 ou 2 sommets de degré impair, et montrons qu'il possède une chaîne eulérienne.

On remarque d'abord que l'on peut ajouter ou retirer au graphe un nombre quelconque de boucles sans modifier ni la parité des degrés des sommets, ni l'existence de chaînes eulériennes. En effet si on ajoute ou si on retranche au graphe G une arête a avec $\delta(a) = \{s\}$, on augmente, ou on diminue, le degré de s de 2. Par ailleurs, si on ajoute au graphe G une arête a avec $\delta(a) = \{s\}$ pour obtenir le graphe G', $s_0, a_1, ..., a_{i-1}, s, a_{i+1}, ..., s_n$ est une chaîne eulérienne dans G si et seulement si $s_0, a_1, ..., a_{i-1}, s, a, s, a_{i+1}, ..., s_n$ est une chaîne eulérienne dans G', et on a un résultat analogue si $s = s_0$ ou si $s = s_n$.

On peut alors raisonner par induction sur le nombre d'arêtes d'un graphe *sans boucles*.

Si ce nombre est 0, c'est trivialement vrai. Si ce nombre est 1, l'unique arête a de ce graphe est telle que $\delta(a) = \{s, s'\}$ avec $s \neq s'$, et s, a, s' est bien une chaîne eulérienne.

Soit un G graphe à $n + 1$ arêtes.

a) Si tous ses sommets sont de degré pair on considère une arête quelconque a dont les extrémités sont s et s'. Soit G' le graphe partiel obtenu en retirant cette arête. Les deux sommets s et s' sont maintenant de degré impair. G' est forcément connexe. En effet soit $CC_{G'}(s)$ la composante connexe de s. Tout d'abord $s' \in CC_{G'}(s)$, car sinon $CC_{G'}(s)$ serait un graphe n'ayant qu'un seul sommet de degré impair, ce qui est impossible (car la somme des degrés d'un graphe est toujours paire). Il existe donc une chaîne c joignant s et s' dans G'. Montrons maintenant que $CC_{G'}(s)$ contient tous les sommets de G'. Soit s'' un sommet quelconque. Comme G est connexe, il existe dans G une chaîne joignant s et s''. Si cette chaîne utilise l'arête a, on remplace l'arête a par la chaîne c. On obtient ainsi une chaîne de G' joignant s et s''. Puisque G' est connexe et a deux sommets s et s' de degré impair, il existe une chaîne eulérienne c' joignant s' et s, et s, a, c' est donc un cycle eulérien de G.

b) Soient s et s' les deux sommets de degré impair de G, soit a une arête telle que $s \in \delta(a)$, et soit s'' le sommet tel que $\delta(a) = \{s, s''\}$. Soit G' le graphe obtenu en retirant cette arête. Le degré de s dans G' est pair.

b.1) Si le degré de s'' dans G est impair (c'est-à-dire $s'' = s'$) alors le degré de s'' dans G' est pair.

b.1.1) Si G' est connexe, il existe un cycle eulérien allant de s à s, et $c, a, s' = s''$ est une chaîne eulérienne de G.

b.1.2) Sinon, d'après la proposition 2.23, $CC_{G'}(s)$ et $CC_{G'}(s')$ sont deux graphes connexes, et tous leurs sommets sont de degré pair. Il existe un cycle eulérien c de s à s dans $CC_{G'}(s)$ et un cycle eulérien c' de s' à s' dans $CC_{G'}(s')$. Alors c, a, c' est une chaîne eulérienne dans G.

b.2) Si le degré de s'' dans G est pair (c'est-à-dire, $s'' \neq s'$) alors le degré de s'' dans G' est impair et $s'' \in CC_{G'}(s')$, puisque s'' et s' sont les deux seuls sommets de degré impair de G'.

b.2.1) Si G' est connexe, il y a une chaîne eulérienne c de G' joignant s'' et s', et s, a, c est une chaîne eulérienne de G.

b.2.2) Sinon, tous les sommets de $CC_{G'}(s)$ ont un degré pair. Il existe un cycle eulérien c de $CC_{G'}(s)$ joignant s et s, une chaîne eulérienne c' de $CC_{G'}(s')$ joignant s'' et s'. Alors c, a, c' est une chaîne eulérienne de G joignant s et s'. □

Nous donnons une autre preuve et une caractérisation complémentaire des graphes Eulériens. Nous utiliserons la proposition 2.27 suivante dans la preuve du théorème 2.28.

Proposition 2.27 *Soit G un graphe fini dont tous les sommets sont de degré ≥ 2, alors G contient un cycle élémentaire.*

Démonstration. Si G contient des boucles ou des arêtes doubles, c'est clair. Supposons donc G simple. Partons d'un sommet s_0 de G et construisons une chaîne $c = s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{i-2}, a_{i-1}, s_{i-1}, a_i, s_i, \ldots$ où pour tout $i \geq 1$, s_i est adjacent à s_{i-1} : c'est possible car tous les sommets sont de degré ≥ 2. Comme G est fini, il y a forcément dans c un sommet s_k qui sera choisi deux fois ; si on prend le premier s_k qui sera choisi deux fois, alors $s_k, a_{k+1}, s_{k+1}, \ldots, s_k$ est un cycle élémentaire. $\square$

Théorème 2.28 *Soit G un graphe non orienté fini sans sommets isolés ; les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) G possède un cycle eulérien

(ii) G est connexe et tous ses sommets sont de degré pair

(iii) G est connexe et l'ensemble des arêtes de G peut être partitionné en cycles élémentaires disjoints.

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$: comme dans le théorème 2.26

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: induction sur le nombre k de cycles élémentaires de G. $k = 0$ est impossible, car (ii) implique que tous les sommets sont de degré ≥ 2 et donc par la proposition 2.27, il existe au moins un cycle élémentaire.

Base : Si $k = 1$, G contient un seul cycle élémentaire c et on montre que tous les sommets de G sont sur ce cycle. Enlevons à G toutes les arêtes de c, nous obtenons un graphe partiel G' dont tous les sommets sont encore de degré pair. Soit $C_1, \ldots, C_k$ les composantes connexes de G'. Si l'une des composantes connexes, C_i par exemple, comportait plus de un sommet, alors C_i serait un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, et par la proposition 2.27, il y aurait au moins un cycle élémentaire c' dans C_i, et donc deux cycles élémentaires dans G (c et c'), une contradiction. Donc tous les C_i sont réduits à un seul sommet, et donc tous les sommets de G sont sur c.

Induction : Supposons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$ est vrai pour les graphes ayant au plus k' cycles élémentaires, pour tout $1 \leq k' < k$. Soit G ayant k cycles élémentaires. Enlevons à G toutes les arêtes d'un cycle élémentaire c, nous obtenons un graphe partiel G' qui a n composantes connexes $C_1, \ldots, C_n$; chaque composante connexe vérifie (ii) et, 1) soit est réduite à un seul sommet, 2) soit a au plus $1 \leq k' < k$ cycles élémentaires (si C_i n'est pas réduite à un sommet, alors elle a $k' \geq 1$ cycles élémentaires par la proposition 2.27). Par l'induction, les arêtes des C_i non réduite à un sommet peuvent être partitionnées en cycles élémentaires, et donc en mettant ensemble toutes les partitions correspondant à ces C_i et en rajoutant le cycle c, on obtient une partition des arêtes de G en cycles élémentaires.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: supposons que les arêtes de G sont partitionnées en cycles élémentaires $C_1 \oplus \cdots \oplus C_m$; on montre par induction sur k que, pour $1 \leq k \leq m$ il existe un cycle simple de G qui contient les arêtes de k des cycles élémentaires $C_1, \ldots, C_m$ et rien d'autre. pour $k = 1$ c'est clair. Supposons que c'est vrai pour $k < m$ et soit c le cycle simple contenant les arêtes de k des cycles $C_1, \ldots, C_m$; comme G est connexe, il existe au moins un autre cycle élémentaire C_j contenant un sommet s de c. Soit c' le cycle simple (mais non élémentaire) obtenu en partant de s, puis en suivant C_j pour revenir à s, puis en suivant c. Le cycle c' contient les arêtes de $k+1$ des cycles $C_1, \dots, C_m$ et rien d'autre. $\square$

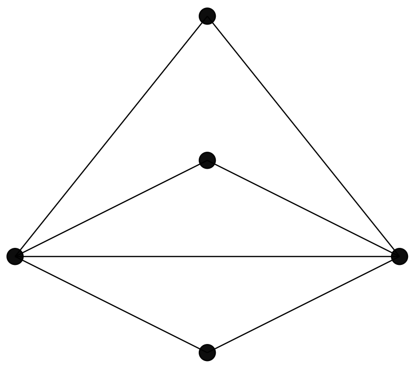

FIGURE 2.9 Graphe Eulérien à six cycles élémentaires et trois partitions en cycles élémentaires

EXERCICE 2.12 La figure 2.9 montre un exemple de graphe Eulérien qui admet six cycles élémentaires (non disjoints), et dont l'ensemble d'arêtes peut être décomposé de trois manières différentes en partitions de deux cycles élémentaires.

Quels sont les six cycles et et les trois partitions ? $\diamond$

Corollaire 2.29 *Un graphe non orienté fini G sans sommets isolés possède une chaîne eulérienne si et seulement si il a 2 sommets de degré impair, et cette chaîne joint les sommets de degré impair.*

Démonstration. Si s_0 et s_1 sont les sommets de degré impair, on ajoute un nouveau sommet s_N et 2 arêtes a_{N0} et a_{N1} reliant s_N à s_0 et s_1 respectivement. Le graphe G' ainsi obtenu est eulérien, et dans tout cycle eulérien de G', les nouvelles 2 arêtes a_{N0} et a_{N1} sont consécutives ; en les retirant, on obtient une chaîne eulérienne de G de s_0 à s_1. $\square$

Nous donnons une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien. Des exemples de graphes hamiltoniens sont les cycles et les cliques.

Théorème 2.30 *Si G est un graphe non-orienté d'ordre $n \geq 3$ tel que pour tout couple s, s' de sommets non adjacents on a $d(s) + d(s') \geq n$, alors G a un cycle hamiltonien.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit G un graphe ayant $n \geq 3$ sommets, non-hamiltonien, qui satifait les hypothèses du théorème, et qui est maximal parmi les graphes non-hamiltoniens vérifiant les hypothèses du théorème, i.e. pour tout couple s_1, s_2 de sommets non adjacents, le graphe G auquel on rajoute une arête de s_1 à s_2 est hamiltonien. Comme G est non-hamiltonien, G n'est pas complet. Soit s_1', s_2' deux sommets non adjacents de G. Soit a' une nouvelle arête de s_1' à s_2' ; $G + a'$ est hamiltonien et tout cycle hamiltonien de $G + a'$ contient a'. Par conséquent il y a une chaîne $c = s_1, a_2, s_2, \dots, s_n$ qui contient tous les sommets de G et qui vérifie $s_1 = s_1'$ et $s_n = s_2'$.

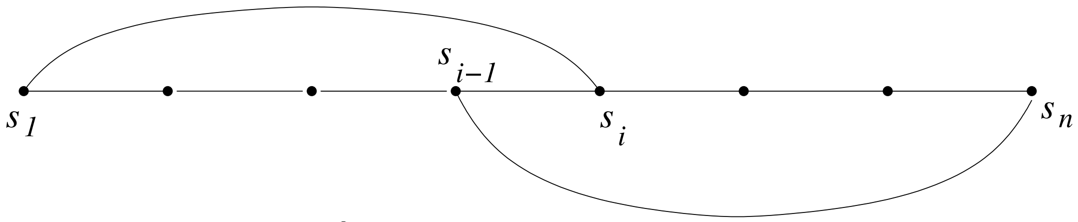

FIGURE 2.10 On n'a pas s_i adjacent à s_1 et s_{i-1} adjacent à s_n.

Si s_i est adjacent à s_1, pour $2 \leq i \leq n$, alors s_{i-1} n'est pas adjacent à s_n. en effet, sinon, soit a_1 (resp. a_{n+1}) l'arête joignant s_i à s_1 (resp. s_{i-1} à s_n) ; alors le cycle

$$c' = s_1, a_1, s_i, a_{i+1}, s_{i+1}, \ldots, s_n, a_{n+1}, s_{i-1}, a_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1$$

serait un cycle hamiltonien de G. Donc pour chaque sommet de $\{s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ adjacent à s_1, il y a un sommet de $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ non adjacent à s_n. Par conséquent, $d(s_n) \leq (n-1) - d(s_1)$, ce qui contredit $d(s_n) + d(s_1) \geq n$. □

Corollaire 2.31 *Si G est un graphe non-orienté d'ordre $n \geq 3$ et de degré minimum $\geq n/2$, alors G est hamiltonien.*

2.1.11 Coloration d'un graphe

Une *coloration* d'un graphe non orienté $G = (S, A, \delta)$ sans boucles est une application $\gamma : S \longrightarrow C$, où C est un ensemble fini de “couleurs”, telle que

$$\forall a, \delta(a) = \{s, s'\} \Longrightarrow \gamma(s) \neq \gamma(s').$$

(C'est-à-dire : deux sommets différents joints par une arête ne peuvent pas être de la même couleur).

Le *nombre chromatique* d'un graphe est le nombre minimal de couleurs qui permettront de le colorier. Par exemple le nombre chromatique d'un cycle de longueur paire (resp. impaire) est 2 (resp. 3), le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3, celui de la n-clique est n. Plusieurs coloriages sont en général possibles (figure 2.11).

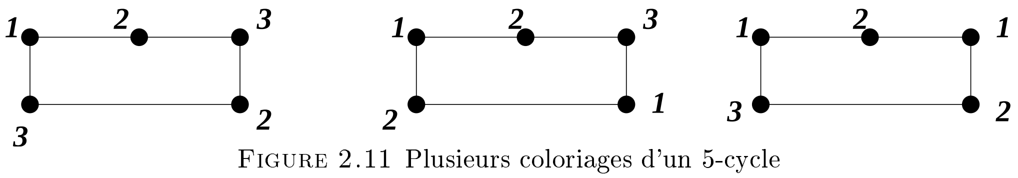

FIGURE 2.11 Plusieurs coloriages d'un 5-cycle

L'*algorithme de Welsh et Powell* décrit ci-dessous permet de colorer un graphe. L'ensemble des sommets est ordonné arbitrairement en $S = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ et les couleurs sont ordonnées en $1, 2, \ldots, p, \ldots$

1. Faire $i \longleftarrow 1$, $\gamma(s_1) \longleftarrow 1$ et $H_1 \longleftarrow \{s_1\}$

2. Si l'ensemble de sommets $H_{i-1} = \langle s_1, s_2, \ldots, s_{i-1} \rangle$ est colorié avec j couleurs, on pose $\gamma(s_i) \longleftarrow k$, où $k \leq j+1$ est la plus petite couleur possible qui donne un coloriage correct, on fait $i \longleftarrow i+1$ et on recommence l'étape 2 jusqu'à ce que $i = n$.

Remarquons que cet algorithme fournit un coloriage avec un nombre de couleurs supérieur ou égal au nombre chromatique du graphe. Par exemple, le nombre chromatique d'une chaîne est 2, mais l'algorithme donne 3 couleurs sur le graphe de la figure 2.12.

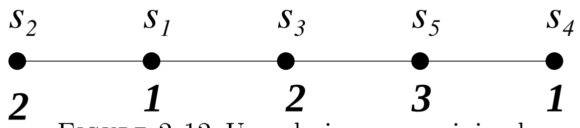

FIGURE 2.12 Un coloriage non minimal

Théorème 2.32 *Si G est un graphe de degré maximum D, son nombre chromatique est inférieur ou égal à $D+1$.*

Démonstration. Soit c (resp. k) le nombre chromatique (resp. le nombre de couleurs utilisées dans le coloriage obtenu par l'algorithme précédent). Un sommet colorié k est adjacent à au moins $k-1$ sommets coloriés par $1, \ldots, k-1$ (sinon il aurait été colorié par une couleur $< k$). Donc $k-1 \leq D$ et $k \leq D+1$, comme $c \leq k$ on obtient $c \leq D+1$. $\square$

Exemple 2.33 Soit un ensemble E d'étudiants et X un ensemble d'épreuves d'examens. Pour tout examen x de X, l'ensemble des étudiants inscrits à cet examen est $S(x)$. Chaque étudiant ne peut passer qu'une seule épreuve par jour. Quelle est la durée minimum de la session d'examens ?

Soit G le graphe dont l'ensemble des sommets est X. Deux sommets x et x' sont reliés par une arête si et seulement si $S(x) \cap S(x') \neq \emptyset$. La durée minimale de la session est le nombre chromatique de ce graphe.

2.1.12 Graphes planaires

Un graphe (orienté ou non orienté) est *planaire* si on peut le dessiner sur un plan de façon à ce que deux arêtes ne se coupent pas.

Remarque 2.34 Il existe plusieurs façons de dessiner un graphe, et même un graphe planaire. La figure 2.13 donne deux dessins possibles du graphe planaire K_4.

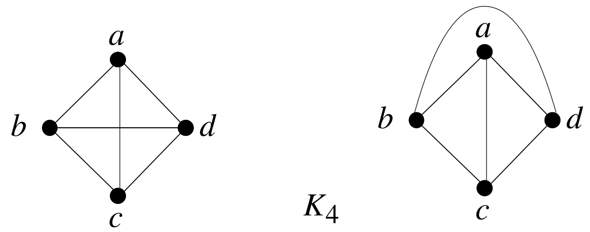

Figure 2.13 Deux dessins du graphe planaire K_4

Les deux graphes de la figure 2.14 ne sont pas planaires

Figure 2.14 Deux graphes non planaires

Un problème célèbre qui a été résolu récemment est le problème des quatre couleurs : le nombre chromatique d'un graphe planaire est-il toujours inférieur ou égal à 4 ? La réponse est oui.

Exercice 2.13 Trouver un graphe planaire de nombre chromatique 4. $\diamond$

2.2 Arbres et arborescences

Les arbres et les arborescences sont des cas particuliers de graphes. Les arbres sont en principe des graphes non orientés, et les arborescences des graphes orientés. Cependant, il est d'usage, chez les informaticiens, d'appeler arbres ce que nous appelons ici arborescences, et même des cas très particuliers d'arborescences que nous introduirons dans la dernière partie de ce chapitre.

2.2.1 Les arbres

Définition 2.35 *Un arbre est un graphe non orienté connexe sans cycles simples.*

A partir du moment où un graphe non orienté contient au moins une arête a, il contient un cycle s, a, s', a, s, où $\delta(a) = \{s, s'\}$. Mais ce cycle n'est pas simple. C'est pourquoi la définition des arbres fait intervenir les cycles simples.

Une *forêt* est un graphe non orienté sans cycles simples. Les composantes connexes d'une forêt sont donc des arbres.

Proposition 2.36 *Soit G un graphe fini, soit n son nombre de sommets, m son nombre d'arêtes et p son nombre de composantes connexes. Alors G est sans cycles simples si et seulement si $m - n + p = 0$.*

Démonstration. 1) $m - n + p$ est toujours positif ou nul. Montrons-le par induction sur le nombre d'arêtes.

- C'est vrai pour un graphe n'ayant aucune arête, car s'il a n sommets, il a n composantes connexes et $0 - n + n = 0$.
- Soit a une arête de G joignant s et s' (qui sont donc dans une même composante connexe) et retirons l'arête a de G. Le graphe G' obtenu a $n' = n$ sommets, $m' = m-1$ arêtes et p' composantes connexes avec $p' = p$ ou $p' = p + 1$, d'où $p \geq p' - 1$. Par hypothèse d'induction, $m' - n' + p' \geq 0$, et $m - n + p \geq m - n + p' - 1 = m' - n' + p'$.

2) Supposons que G contienne un cycle simple c, et montrons que $m - n + p > 0$. Soit a une arête quelconque de ce cycle, avec $\delta(a) = \{s, s'\}$ (s' pouvant être égal à s). Il existe donc une chaîne c' joignant s' et s qui n'utilise pas l'arête a.

Soit G' le graphe obtenu en retirant de G cette arête a. On a, pour G', $m' = m - 1$, $n' = n$. On a aussi $p' = p$ puisque le nombre de composantes connexes n'est pas modifié : si deux sommets sont joints par une chaîne de G qui utilise l'arête a, ils sont joints par la chaîne de G' obtenue en remplaçant chaque occurrence de a par la chaîne c' qui est dans G'. D'où $m - n + p = m' + 1 - n' + p' > m' - n' + p' \geq 0$.

3) Réciproquement, montrons que si $m - n + p > 0$, alors G a un cycle simple. Nous le montrons encore par induction sur le nombre d'arêtes.

- Si $m = 0$, on a montré en 1) qu'on ne pouvait pas avoir $m - n + p > 0$.
- Soit G' le graphe obtenu en retirant de G une arête a quelconque. On a montré en 1) que dans ce cas $m - n + p \geq m' - n' + p'$ et que $p' = p$ ou $p' = p + 1$.
  - Si $m' - n' + p' > 0$, alors, par hypothèse d'induction, G' contient un cycle simple, et donc G aussi.

- Si $m' - n' + p' = 0$, alors $m - n + p > m' - n' + p'$, ce qui implique $p' = p$. Autrement dit, le fait de retirer l'arête a ne modifie pas les composantes connexes. Comme les extrémités s et s' de a sont dans la même composante connexe de G, elles sont dans la même composante connexe de G'. Il existe donc une chaîne simple c qui joint s et s' (*cf.* exercice 2.6) et qui n'utilise pas l'arête a. En ajoutant l'arête a à cette chaîne, on obtient un cycle simple. □

Corollaire 2.37 *Si G est un arbre ayant n sommets et m arêtes, $m = n - 1$.*

Théorème 2.38 *Soit G un graphe non orienté à n sommets ($n \geq 2$). Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) G est connexe et sans cycles simples,

2) G est sans cycles simples et a $n - 1$ arêtes,

3) G est connexe et a $n - 1$ arêtes,

4) G est sans cycles simples ; si on lui ajoute une arête on forme un cycle simple,

5) G est connexe ; si on lui retire une arête, il n'est plus connexe,

6) $\forall s, s' \in S$, $(s \neq s')$, il existe une et une seule chaîne simple joignant s et s'.

Démonstration.

($1 \Longrightarrow 2$) Puisque G est connexe, $p = 1$. Si G est sans cycles simples alors $m - n + 1 = 0$ et le nombre d'arêtes m de G est $n - 1$.

($2 \Longrightarrow 3$) Si G est sans cycles simples, $m - n + p = 0$, et si $m = n - 1$, alors $p = 1$ et donc G est connexe.

($3 \Longrightarrow 4$) Si G est connexe et a $n - 1$ arêtes alors $m - n + p = 0$ et donc G est sans cycles simples. Si on lui ajoute une arête il reste connexe et $m' - n' + p' = m + 1 - n + p > 0$. On a donc fait apparaître un cycle simple.

($4 \Longrightarrow 5$) Si G n'était pas connexe on pourrait lui ajouter une arête sans créer de cycles : il suffit de prendre une arête reliant deux sommets de deux composantes connexes distinctes. Si en lui retirant une arête on obtient encore un graphe connexe (qui sera aussi sans cycle simple), on a $m' - n' + p' = m - 1 - n + p = 0$ d'où $m - n + p > 0$, et G ne serait pas sans cycles simples.

($5 \Longrightarrow 6$) Soit s et s' deux sommets de G. Puisque G est connexe il existe une chaîne qui les joint. S'il y a deux de ces chaînes, d'après la proposition 2.14, le graphe contient un cycle simple et on pourrait donc en retirer une arête en le laissant connexe.

($6 \Longrightarrow 1$) G est connexe. S'il contenait un cycle simple, on pourrait trouver deux chaînes distinctes joignant deux sommets. □

Exercice 2.14 Si on retire une arête d'un arbre les deux composantes connexes obtenues sont toutes deux des arbres. ◇

Proposition 2.39 *Un arbre à n sommets ($n \geq 2$) a au moins deux sommets de degré 1.*

Démonstration. Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égal à deux fois le nombre d'arêtes. Dans un arbre, le nombre d'arêtes est $n - 1$ et la somme des degrés des sommets est donc égale à $2n - 2$. Comme un arbre est un graphe connexe, il n'y a pas de sommets de degré 0. Soit k le nombre de sommets de degré 1. Il y a donc $n-k$ sommets de degré au moins égal à 2 et la somme des degrés des sommets est supérieure ou égale à $k+2(n-k)=2n-k$. Comme $2n-2 \geq 2n-k$, on a $k \geq 2$. □

EXERCICE 2.15 Montrer que si un arbre G a exactement deux sommets de degré 1, alors tous les autres sommets sont de degré 2. En déduire que G consiste en une seule chaîne élémentaire. ◇

Proposition 2.40 *Un graphe fini G a un graphe partiel qui est un arbre si et seulement si il est connexe. Cet arbre est appelé un arbre couvrant de G.*

Démonstration. Si un graphe a un graphe partiel connexe, il est connexe. Si un graphe est connexe et si on peut lui retirer une arête en le laissant connexe, on retire cette arête. Lorsqu'on ne pourra plus retirer d'arêtes, on aura obtenu un arbre, d'après le point 5 du théorème 2.38. □

Les arbres couvrants peuvent être construits de diverses manières : si on les construit par des algorithmes en largeur (ou gloutons, ou *breadth-first*) similaires à l'algorithme de Moore, ils préservent les distances ; si on les construit par des algorithmes en profondeur (ou *depth-first*), ils ne préservent pas toujours les distances.

EXEMPLE 2.41 Dans la figure 2.15, les arbres couvrants $A1$ et $A2$ préservent les distances au sommet a et sont obtenus par un algorithme en largeur, les arbres couvrants $B1$ et $B2$ ne préservent pas les distances au sommet a, sont obtenus par un algorithme en profondeur, et ne peuvent pas être obtenus par un algorithme en largeur commençant au sommet a.

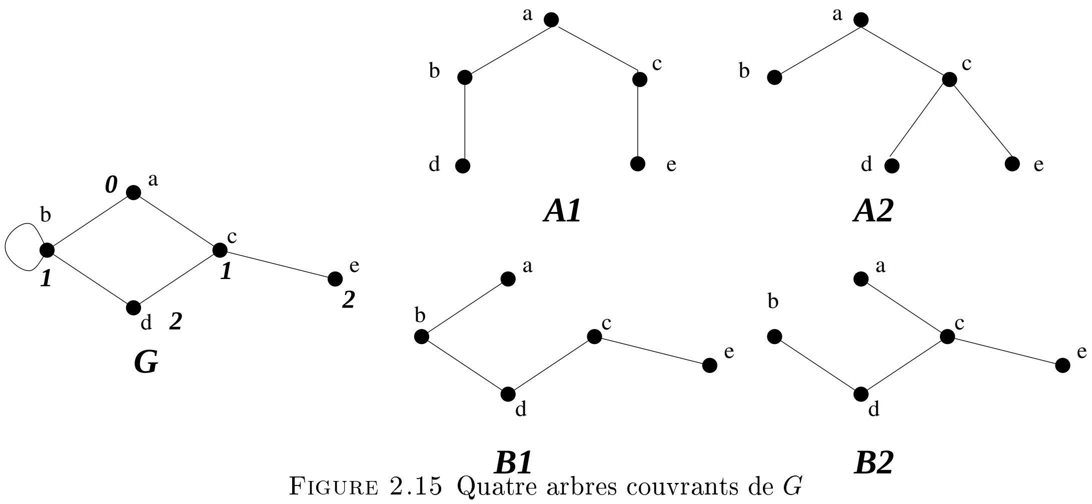

FIGURE 2.15 Quatre arbres couvrants de G

L'algorithme suivant (du type glouton ou en largeur) construit un arbre couvrant préservant les distances. Les données sont un graphe connexe non orienté G, ayant pour arêtes $a_1, \ldots, a_m$ et un sommet initial s_0 donné ; le résultat est un arbre couvrant A de G, tel que la distance d'un sommet quelconque à s_0 soit la même dans G et A. Soit T l'ensemble des arêtes de A.

1. Faire $i \Longleftarrow 0$, $S=\{s_0\}$, et $T \Longleftarrow \emptyset$.

2. Soit $T_i=\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\}$ un ensemble maximal d'arêtes ayant une extrémité dans S, n'appartenant pas à T et telles que $T \cup T_i$ soit un arbre. Si T_i est vide, l'algorithme s'arrête. Sinon, faire $T \longleftarrow T \cup T_i$, $S \longleftarrow S \cup S_i$, où S_i est l'ensemble des sommets des arêtes de T_i qui ne sont pas dans S.

3. Faire $i \Longleftarrow i+1$ et retourner à l'étape 2 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien ajouter.

L'arbre couvrant obtenu par cet algorithme n'est pas unique (cf. figure 2.15). Un algorithme en profondeur sélectionnera une seule arête ayant une extrémité dans S à chaque étape 2.

On peut adapter cet algorithme pour préserver non plus les distances, mais des poids dont les arêtes sont dotées. Les données sont maintenant un graphe connexe non orienté G, ayant pour arêtes $a_1, \ldots, a_n$, chaque arête a_i est affectée d'un poids p_i donné ; le résultat est un arbre couvrant de G, soit A, dont le poids total est minimum. Soit T l'ensemble des arêtes de A.

1. Faire $i \Longleftarrow 0$, et $T \Longleftarrow \emptyset$.

2. Soit a une arête de poids minimum, n'appartenant pas à T et telle que $T \cup a$ soit un arbre. S'il n'y a pas de telle arête, l'algorithme s'arrête. Sinon, faire $a_i \longleftarrow a$, $T \longleftarrow T \cup a_i$,

3. Faire $i \Longleftarrow i+1$ et retourner à l'étape 2 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien ajouter.

L'arbre couvrant obtenu par cet algorithme n'est pas unique et est en général différent de ceux préservant les distances (cf. figure 2.16). C'est aussi un algorithme de type glouton, *i.e.* à tout instant il est possible de faire le meilleur choix ; pour certains problèmes, on ne peut pas faire mieux que le meilleur choix possible à un instant donné (mais pas le meilleur possible dans l'absolu), on dit alors qu'on a un algorithme gourmand.

L'algorithme précédent est du type "en profondeur" ; nous donnons aussi ci-dessous un algorithme "en largeur" pour construire un arbre couvrant de poids minimum.

1. Faire $i \Longleftarrow 0$, et $T \Longleftarrow \emptyset$.

2. Soit $T_i = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}\}$ un ensemble maximal d'arêtes de poids minimum, n'appartenant pas à T et telles que $T \cup T_i$ soit une forêt (sans cycle). Si T_i est vide, l'algorithme s'arrête. Sinon, faire $T \longleftarrow T \cup T_i$, $S \longleftarrow S \cup S_i$, où S_i est l'ensemble des sommets des arêtes de T_i qui ne sont pas dans S.

3. Faire $i \Longleftarrow i+1$ et retourner à l'étape 2 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rien ajouter.

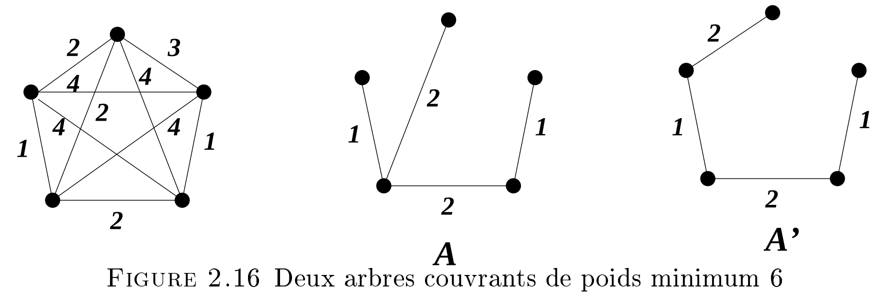

FIGURE 2.16 Deux arbres couvrants de poids minimum 6

EXERCICE 2.16 Montrer (par induction) qu'un arbre peut toujours être dessiné sur le plan de façon que les arêtes forment des segments de droite sans intersections mutuelles à part aux extrémités ; en particulier il est planaire. ◊

2.2.2 Les arborescences

Définition 2.42 *Une arborescence est un graphe orienté G, tel que $\gamma(G)$ est un arbre, et dont tous les sommets sont de degré entrant égal à 1, à l'exception d'un seul sommet, appelé racine, pour lequel ce degré entrant est nul.*

Proposition 2.43 *Si G est un arbre fini, pour tout sommet s de G, il existe une orientation de G qui en fait une arborescence de racine s.*

Démonstration. Par induction sur le nombre m d'arêtes de G. Si $m = 0$, c'est clair. Soit $m > 0$ et s un sommet quelconque d'un arbre G et a une arête d'extrémités s et s'. Le retrait de cette arête donne deux graphes connexes $G(s)$ et $G(s')$ qui sont encore des arbres. On oriente ces deux arbres de façon à ce que leurs racines respectives soient s et s' et on oriente l'arête a de s vers s'. On obtient ainsi une arborescence de racine s. En effet, pour tout sommet s'' de $G(s) \cup G(s')$, différent de s et s', le degré entrant de s'' est égal à son degré entrant dans l'arborescence construite à partir de $G(s)$ ou de $G(s')$, c'est-à-dire 1. Le degré entrant de s' est 1 et celui de s est 0. □

Proposition 2.44 *Soit G une arborescence et s un de ses sommets. Soit $G(s)$ le sous-graphe de G dont l'ensemble des sommets est $\{s\}$ augmenté de tous les sommets qui sont le but d'un chemin d'origine s. Alors $G(s)$ est une arborescence de racine s.*

Démonstration. Par construction de $G(s)$, $\gamma(G(s))$ est connexe. De plus, $\gamma(G(s))$ ne contient pas de cycles simples, car s'il en contenait un, ce cycle serait aussi dans $\gamma(G)$, ce qui est impossible, puisque $\gamma(G)$ est un arbre. Donc $\gamma(G(s))$ est un arbre.

Par construction de $G(s)$, tout sommet s' de $G(s)$, différent de s, est l'extrémité d'une arête dont l'origine est dans $G(s)$. Cette arête est l'unique arête de G d'extrémité s'. Le degré entrant de s' dans $G(s)$ est donc bien 1. Si le degré entrant de s était aussi égal à 1 dans $G(s)$, c'est qu'il existerait une arête de but s ayant son origine dans $G(s)$. Il existerait dans G un circuit simple passant par s, et il existerait donc dans G un cycle simple, ce qui est impossible. □

Théorème 2.45 (Lemme de König) *Soit G une arborescence infinie dont tout sommet a un degré sortant fini. Alors G a un chemin infini dont l'origine est la racine.*

Démonstration. Soit $a_1, \ldots, a_n$ les arêtes de G dont l'origine est la racine de G. Une des arborescences $G(\beta(a_i))$ pour $i = 1, \ldots, n$, est donc infinie. (Ces arborescences sont définies dans la proposition 2.44). Soit donc i tel que $G(\beta(a_i))$ est infini, et posons $a'_1 = a_i$. Supposons maintenant qu'on ait défini un chemin $a'_1 a'_2 ... a'_n$ tel que $G(\beta(a'_n))$ soit infini et soit $a''_1, \ldots, a''_k$ les arêtes d'origine $\beta(a'_n)$. On pourra encore trouver un j tel que $G(\beta(a''_j))$ est infini et on pose $a'_{n+1} = a''_j$. Comme on peut répéter indéfiniment cette construction on construit bien un chemin infini dans l'arborescence G. □

On utilise souvent le Lemme de König sous d'autres formes qui sont des conséquences du théorème ci-dessus.

Proposition 2.46 *Soit $G = (S, A, \alpha, \beta)$ un graphe orienté tel que tout sommet s a un degré sortant $d^+(s)$ fini.*

Si un sommet s de ce graphe est l'origine d'une infinité de chemins finis, il est aussi l'origine d'un chemin infini.

Démonstration. Soit C l'ensemble, infini par hypothèse, des chemins d'origine s. Pour $n > 0$, soit C_n l'ensemble des chemins d'origine s de longueur n de sorte que $C = \bigcup_{n>0} C_n$. Soient aussi $C_0 = \{s\}$ et $C' = C_0 \cup C$. On définit l'ensemble $R \subseteq C' \times C'$ par $(c, c') \in R$ si et seulement si

soit $c = s \in C_0$ et $c' \in C_1$,

soit il existe $n > 0$ et $a \in A$ tel que $c \in C_n$ et $c' = ca$.

On montre alors que le graphe $G' = (C', R, \alpha', \beta')$ avec $\alpha'(c, c') = c$ et $\beta'(c, c') = c'$ est une arborescence. Le degré entrant de s est 0 et son degré sortant est $d^+(s)$. Le degré entrant de $c \in C$ est 1 et son degré sortant est égal à $d^+(s')$ où s' est le but du chemin c.

D'après le lemme de König, cette arborescence possède un chemin infini $s, c_1, c_2, \ldots, c_n \ldots$ avec $c_1 = a_1$, $c_{i+1} = c_i a_{i+1}$ d'où on déduit que $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ est un chemin infini d'origine s dans le graphe G. □

Exercice 2.17 Soit A un alphabet fini et soit L une partie de A^*. Montrer que si L est infinie, il existe au moins une suite infinie $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ de lettres de A telle que $\forall n \geq 0$, $\exists w_n \in A^* : a_0 \cdots a_n w_n \in L$. ◊

Proposition 2.47

Soit E_n un ensemble fini non vide, pour tout entier $n \geq 0$, et supposons que

(i) $n \neq m \Longrightarrow E_n \cap E_m = \emptyset$.

Soit R une relation binaire sur $E = \cup_{n \geq 0} E_n$ telle que

(ii) si $e\ R\ e'$ alors il existe n tel que $e \in E_n$ et $e' \in E_{n+1}$,

(iii) $\forall n \geq 0$, $\forall e' \in E_{n+1}$, $\exists e \in E_n : e\ R\ e'$.

Alors il existe une suite infinie $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ telle que $\forall n \geq 0$, $e_n \in E_n$ et $e_n\ R\ e_{n+1}$.

Démonstration. Considérons (E, R) comme un graphe orienté. D'après (ii), le degré sortant d'un élement de E_n est au plus égal au nombre d'éléments de E_{n+1}. Il est donc fini. D'après (i), $\bigcup_{n>0} E_n$ est infini. D'après (iii), chaque élément de E_{n+1} est le but d'un chemin dont l'origine est dans E_0. Il existe donc une infinité de chemins dont l'origine est dans E_0, et comme E_0 est fini, il existe un élément e_0 de E_0 qui est l'origine d'une infinité de chemins finis. D'après la proposition 2.46, il est aussi l'origine d'un chemin infini passant par la suite de sommets $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ qui est la suite cherchée. □

Exercice 2.18 Soit S une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui possède les propriétés suivantes :

(i) quel que soit $n \geq 0$, l'ensemble $\{m \in \mathbb{N} \,/\, (n, m) \in S\}$ est fini,

(ii) quel que soit $n \geq 0$, il existe une injection $f_n : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $(i, f_n(i)) \in S$.

Montrer qu'il existe une injection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $(i, f(i)) \in S$. ◊

2.2.3 Tournois

Définition 2.48 *Un tournoi d'ordre n est un graphe orienté sans boucle dont le graphe non orienté associé est la n-clique.*

Les tournois peuvent modéliser un championnat entre des équipes sportives où chaque équipe doit rencontrer toutes les autres, il n'y a jamais de match nul, et on indique le gagnant par le but de la flèche.

Exemple 2.49 Dans la figure 2.17, $G1$ et $G2$ sont des tournois fortement connexes, $G'1$ et $G'2$ sont des tournois non fortement connexes.

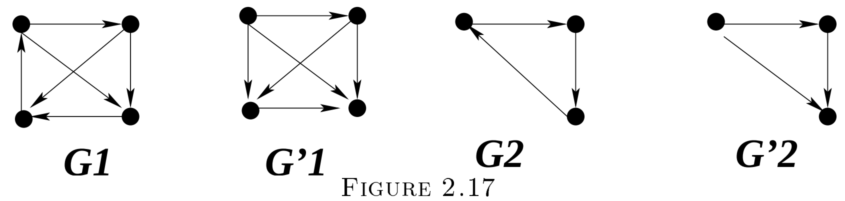

Figure 2.17

Théorème 2.50 *Si G est un tournoi fortement connexe d'ordre $n \geq 3$, alors $\forall s \in S$, $\forall k,\ 3 \leq k \leq n$, il existe dans G un circuit élémentaire de longueur k contenant s.*

Démonstration. Par induction sur k. Le cas de base est pour $k = 3$. Soit $G = \langle S, A, \alpha, \beta \rangle$ et soit $s \in S$. Posons $O = \{s' | \exists a, \alpha(a) = s', \beta(a) = s\}$, *i.e.* les sommets origine d'une arête de but s, et $B = \{s' | \exists a, \alpha(a) = s, \beta(a) = s'\}$, *i.e.* les sommets but d'une arête d'origine s. Comme G est un tournoi, $S = \{s\} \oplus B \oplus O$; O (resp. B) est non vide, en effet, sinon, étant donné un sommet quelconque s'' il n'y aurait pas de chemin de s'' vers s (resp. de s vers s'') ce qui contredirait la forte connexité de G. Soient $s_0 \in B$ et $s_1 \in O$, et c un chemin de s_0 vers s_1 (qui existe par la forte connexité) ; $c = a_1, \ldots, a_n$ avec $\alpha(a_1) = s_0 \in B$ et $\beta(a_n) = s_1 \in O$, et soit a_i la première arête de c telle que $\beta(a_i) = s_i \in O$, alors $\alpha(a_i) = s_{i-1} \in B$ (sinon a_i ne serait pas la première). Soient a, a' telles que $\alpha(a) = s,\ \beta(a) = s_{i-1},\ \alpha(a') = s_i.\ \beta(a') = s$: $c = a, a_i, a'$ est un circuit de longueur 3 passant par s.

Induction : soit $c = a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n$ un circuit de longueur k passant par s, soient $S_c = (s_1, s_2, \ldots, s_k, s_1)$ les sommets de c ;

1. s'il existe dans G un sommet s' où c ne passe pas et deux arêtes a, a' telles que $\alpha(a) = s' = \beta(a')$ et $\alpha(a') = s_i$, $\beta(a) = s_j$, soit l le plus petit indice compris entre i et j (modulo k) tel qu'il existe une arête a'' avec $\alpha(a'') = s'$ et $\beta(a'') = s_l$, alors on a aussi une arête a^1 avec $\alpha(a^1) = s_{l-1}$ et $\beta(a^1) = s'$ (l et $l-1$ sont à prendre modulo k). Le circuit de longueur $k+1$ passant par s est alors $c' = a_1, \ldots, a_{l-1}, a^1, a'', a_{l+1}, \ldots, a_k$.
2. sinon, on peut partitionner l'ensemble S des sommets de G en $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \oplus B \oplus O$ avec $\forall s_i \in \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, d'une part $\forall s \in O$, $\exists a^i\ \alpha(a) = s, \beta(a) = s_i$, et d'autre part, $\forall s' \in B$, $\exists a'^i\ \alpha(a) = s_i, \beta(a) = s'$, *i.e.* tous les sommets de O sont origine d'une arête allant vers un sommet de c et les sommets de B sont but d'une arête provenant d'un sommet de c. Pour la même raison que dans le cas $k = 3$, $O \neq \emptyset \neq B$, et il existe une arête a avec $\alpha(a) = s' \in B$ et $\beta(a) = s'' \in O$; alors, en supposant par exemple $s_2 \neq s$, $c = a'^1, a, a^3, a_3, \ldots, a_k$ est un circuit de longueur $k+1$ passant par les sommets $(s_1, s', s'', s_3, \ldots, s_k, s_1)$.

Voir figure 2.18. Il est facile de voir que les circuits construits à chaque étape de l'induction sont élémentaires. □

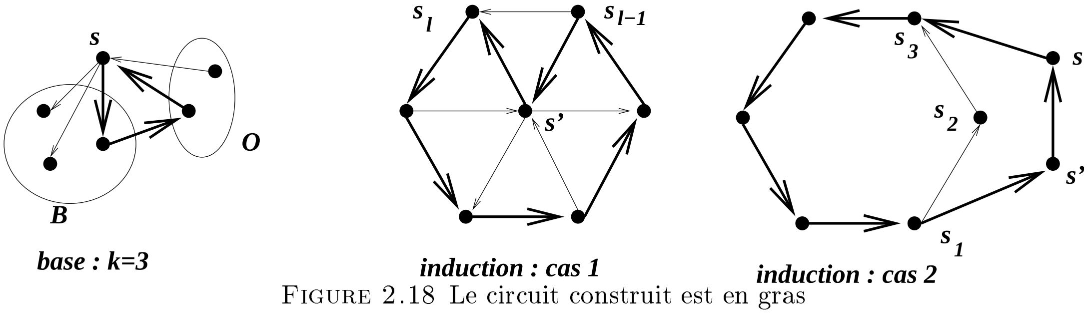

FIGURE 2.18 Le circuit construit est en gras

Corollaire 2.51 *Tout tournoi fortement connexe d'ordre $n \geq 3$ est hamiltonien.*

2.2.4 Arborescences dessinées

Soit G une arborescence et soit s un de ses sommets. On dira qu'un sommet s' est le *fils* de s s'il existe une arête d'origine s et de but s'. Si s n'est pas la racine de l'arborescence, s est de degré entrant 1 : il existe donc une et une seule arête a dont s est le but. Le sommet origine de cette arête a sera appelé le *père* de s. Il est facile de montrer que tout sommet s est le père de ses fils.

Une arborescence est dite *dessinée* si pour tout sommet s, l'ensemble des fils de s est muni d'un ordre total. Lorsqu'on dessinera une telle arborescence dans le plan (en général, et bizarrement, avec la racine en haut, et les fils en dessous de leur père), cet ordre total sur les fils d'un même père sera matérialisé en les écrivant de gauche à droite. C'est d'ailleurs pourquoi ces arborescences sont appelées "dessinées". Certaines arborescences dessinées peuvent être vides, *i.e.* peuvent avoir des ensembles de sommets et d'arêtes vides.

On appelle *arbre binaire complet* une arborescence dessinée où chaque sommet a soit deux fils (appelés *fils gauche* et *fils droit*), soit aucun. Un sommet sans fils est appelé une *feuille*.

EXEMPLE 2.52 Nous avons dans la figure 2.19 deux arbres binaires dessinés différents qui sont une seule et même arborescence.

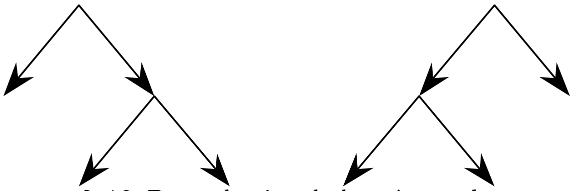

FIGURE 2.19 Deux dessins de la même arborescence

EXERCICE 2.19 1) Montrer qu'un arbre binaire complet fini a un nombre impair de sommets.

2) Montrer qu'un arbre binaire complet à $2n-1$ sommets a n feuilles. ♢