

Structures Discrètes – T.D. Langages et automates

LANGAGES ET MORPHISMES

EXERCICE 1 Soit A l'alphabet $\{a, b\}$ et B l'alphabet $\{a, b, c\}$. On note P l'ensemble des mots sur A formé par ε et les mots commençant par a et sans facteur bbb . Vérifier que P est un sous-monoïde de A^* .

Soit ϕ l'homomorphisme de B^* dans A^* défini par $\phi(a) = abb, \phi(b) = ab, \phi(c) = a$. Montrer que c'est un isomorphisme de B^* sur P .

Rappel : par définition, un isomorphisme de monoïdes est un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme. Cependant tout homomorphisme de monoïdes qui est bijectif est un isomorphisme. $\diamond$

EXERCICE 2 Soit A un alphabet contenant au moins les lettres a et b .

- 1) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \cdot A)^*$.
- 2) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \setminus \{b\})^*$.
- 3) Y a-t-il un isomorphisme de monoïdes entre $(A \setminus \{a\})^*$ et $(A \setminus \{b\})^*$? $\diamond$

EXERCICE 3 1) Montrer que $(\mathcal{P}(A^*), \cdot, \{\varepsilon\})$ est un monoïde.

2) Montrer que si $(L_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de langages, alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) \cdot L = \bigcup_{i \in I} L_i \cdot L,$$

- 3) Montrer que $L^* = (L + \{\varepsilon\})^*$ et que $L^* = \{\varepsilon\} + L \cdot L^*$.
- 4) Montrer que $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$. $\diamond$

EXERCICE 4 Soit $X = \{b\}$ et $Y = (A \setminus \{b\}) \cdot \{b\}^*$.

- 1) Décrire informellement les éléments de X^* , Y et Y^* .
- 2) Montrer que tout mot de A^* commençant par une lettre distincte de b appartient à Y^* .
- 3) Montrer que tout mot u de A^* s'écrit de façon unique sous la forme $u = vw$, où $v \in X^*$ et $w \in Y^*$. $\diamond$

EXERCICE 5 **Lemme de Lévi:** Soient $u, v, x, y \in A^*$. Montrer que $uv = xy$ si et seulement si l'un des trois cas suivants est vérifié:

- (i) $|u| = |x|$, $u = x$, et $v = y$.
- (ii) $|u| < |x|$ et il existe $t \in A^*$ tel que $ut = x$ et $v = ty$.
- (iii) $|u| > |x|$ et il existe $t \in A^*$ tel que $u = xt$ et $tv = y$. $\diamond$

AUTOMATES COMPLETS ET DÉTERMINISTES

EXERCICE 6 Expliquez pourquoi l'automate suivant sur $\{a, b\}$ n'est pas complet. Quel langage reconnaît-il ? Donnez un automate complet équivalent. $\diamond$

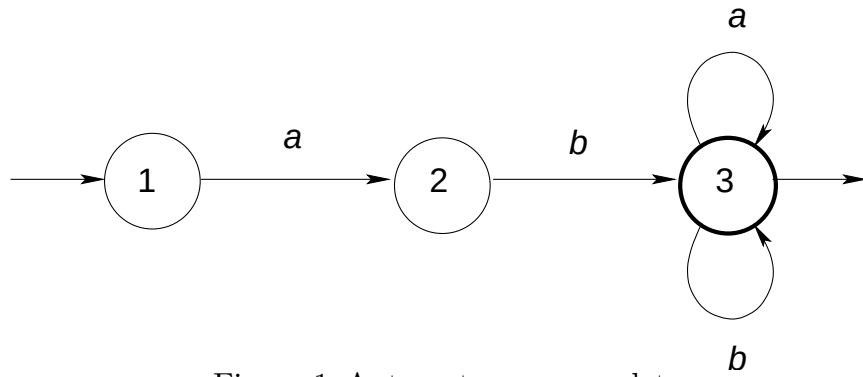


Figure 1 Automate non complet

EXERCICE 7 Représenter l'automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ d'états $0, 1, 2, 3$, d'état initial 0 , d'état terminal 3 et de transitions $(0, a, 1)$, $(0, a, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, c, 0)$, $(1, a, 2)$, $(1, b, 2)$, $(1, c, 2)$, $(2, a, 3)$, $(2, b, 3)$, $(2, c, 3)$.

- Cet automate est-il complet ? déterministe ? justifier.
- Les mots *baba* et *cabcb* sont-ils reconnus par $\mathcal{A}$?
- Décrire $L(\mathcal{A})$ en langage ordinaire, puis en donner une expression rationnelle. $\diamond$

CONSTRUCTION D'AUTOMATES

EXERCICE 8 Construire un automate déterministe reconnaissant le langage fini $\{a, ba, aba, bab, bbba\}$. $\diamond$

EXERCICE 9 Soit $A = \{a, b, c\}$. Donner des automates déterministes complets reconnaissant les langages suivants:

- 1) L'ensemble des mots de longueur paire.
- 2) L'ensemble des mots où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3.
- 3) L'ensemble des mots se terminant par "b".
- 4) L'ensemble des mots ne se terminant pas par "b".
- 5) L'ensemble des mots non vides ne se terminant pas par "b".
- 6) L'ensemble des mots contenant au moins un "b".
- 7) L'ensemble des mots contenant au plus un "b".
- 8) L'ensemble des mots contenant exactement un "b".
- 9) L'ensemble des mots ne contenant aucun "b".
- 10) L'ensemble des mots contenant au moins un "a" et dont la première occurrence de "a" n'est pas suivie par un "c". $\diamond$

OPÉRATIONS

EXERCICE 10 Les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ suivants sur $\{a, b\}$ sont-ils déterministes ? Expliquez pourquoi et si ce n'est pas le cas, déterminez-les.

Les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et les automates déterministes construits sont-ils complets ? Que remarquez-vous ? $\diamond$

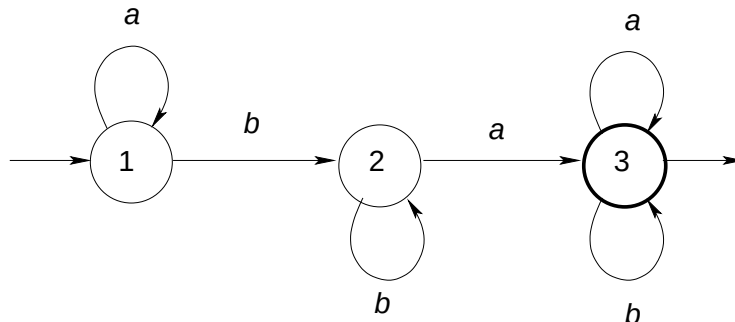


Figure 2 L'automate $\mathcal{A}_1$

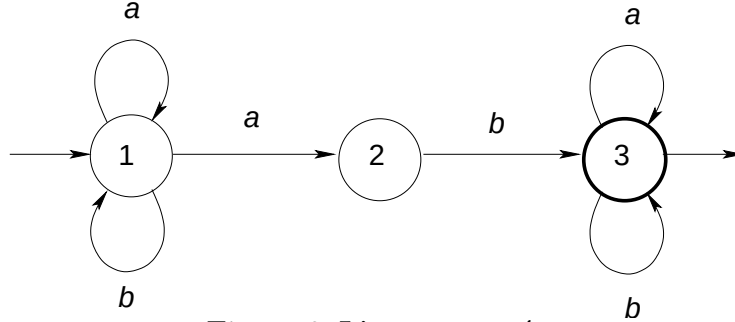


Figure 3 L'automate $\mathcal{A}_2$

EXERCICE 11 Soit $A = \{a, b\}$; Soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre pair de b et L_2 le langage comprenant tous les mots contenant un nombre impair de a .

1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet $\mathcal{A}_i$ reconnaissant L_i et exprimer L_i sous forme d'expression rationnelle.

2. Construire à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cap L_2$.

3. Construire à partir des $\mathcal{A}_i$ un automate déterministe reconnaissant $L_1 \cup L_2$. $\diamond$

EXERCICE 12 Soient L_1 et L_2 des langages sur un alphabet A . Montrer que si L_1 et L_2 sont respectivement reconnaissables par des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ alors le langage $L_1 \setminus L_2$ est reconnaissable par un automate. $\diamond$

LANGAGES RECONNAISSABLES

EXERCICE 13 Soit L un langage et $\text{Pref}(L) = \{u \in A^* / \exists v \in A^* : uv \in L\}$ l'ensemble des préfixes des mots de ce langage L . Montrer que si un langage L est reconnaissable l'ensemble $\text{Pref}(L)$ est aussi reconnaissable. $\diamond$

EXERCICE 14 **Lemme de l'étoile:** Soit L un langage reconnaissable par un automate fini. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout mot $m \in L$ vérifiant $|m| \geq N_0$ (où $|m|$ est la longueur de m), on a $m = \alpha u \beta$ avec

- (i) $u \neq \varepsilon$,
- (ii) $|u| < N_0$,
- (iii) $\alpha u^* \beta \subset L$. $\diamond$

EXERCICE 15 Montrer que les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$ ne peuvent pas être reconnus par un automate fini.

$$L_1 = \{a^n b^n, n \geq 0\},$$

$$L_2 = \{a^p, p \text{ premier}\}. \quad \diamond$$

EXERCICE 16 Les langages ci-dessous sont-ils reconnaissables ?

$$L = \{a^n b^p \mid n, p \geq 0, n = p \bmod 3\}$$

$$L' = \{a^m b^n \mid m \geq 1, n \geq 1, m \neq n\}$$

◇

AUTOMATES MINIMAUX ET EXPRESSIONS RATIONNELLES

EXERCICE 17 Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant "aa" et L_2 le langage comprenant tous les mots ne contenant pas "bb".

1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet A_i reconnaissant L_i .
2. Construire à partir des A_i un automate déterministe et complet $\mathcal{A}$ reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. $\mathcal{A}$ est-il minimal ? Justifiez votre réponse et construisez un automate minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant $L_1 \cap L_2$.

◇

EXERCICE 18 Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, 2, 3, 4, 5 d'état initial 0, d'état terminal 5 et de transitions : (0, a, 1), (1, a, 2), (2, a, 2), (3, a, 4), (4, a, 4), (5, a, 5), (0, b, 3), (1, b, 5), (2, b, 5), (3, b, 5), (4, b, 5), (5, b, 5). Dessiner l'automate $\mathcal{A}$. Minimiser $\mathcal{A}$.

◇

EXERCICE 19 Soit $A = \{a, b, c\}$. Construire un automate non déterministe qui reconnaît l'ensemble L des mots de longueur paire qui se terminent par ab . En déduire un automate déterministe complet reconnaissant L .

◇

EXERCICE 20 Construire un automate déterministe complet minimal reconnaissant l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ comportant au moins trois lettres et dont la troisième lettre à partir de la fin est un "a" ou un "c".

◇

EXERCICE 21 Donner les automates déterministes complets minimaux reconnaissant les langages sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ donnés par les expressions rationnelles suivantes

- 1) $(a + b)^* b (a + b)^*$.
- 2) $((a + b)^2)^+ + ((a + b)^3)^+$.
- 3) $ba^* + ab + (a + bb)ab^*$.

◇

SYSTÈMES

EXERCICE 22 Soit L l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ où le nombre d'occurrences de "b" est divisible par 3. Il y a un automate $\mathcal{A}$ à trois états tel que $L = L(\mathcal{A})$. Donner le système d'équations associé aux transitions, et résoudre ce système pour $L_{I,F}$, pour donner une expression rationnelle dénotant L .

◇

EXERCICE 23 Soit $A = \{a, b\}$ et L le langage comprenant tous les mots ayant trois occurrences successives de "a". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L .

◇

EXERCICE 24 Soit L le langage sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ comprenant tous les mots qui n'ont pas trois occurrences successives de "a". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L .

◇

EXERCICE 25 Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et L le langage comprenant tous les mots où tout "a" est suivi d'un "b" et tout "c" est suivi d'un "b". Donner l'automate déterministe complet minimal reconnaissant L et résoudre le système d'équations correspondant; en déduire une expression rationnelle pour L .

◇

EXERCICE 26 1) Soit l'automate $\mathcal{A}$ d'états 0, 1, d'état initial 0, d'état terminal 1 et de transitions : (0, a, 0), (0, b, 1), (1, a, 0) et (1, b, 1). (Dessiner l'automate $\mathcal{A}$.) Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Donner le système d'équations associé à $\mathcal{A}$ et en déduire une expression rationnelle pour L .

2) Mêmes questions avec $\mathcal{B}$ d'états 0, 1, 2 d'état initial 0, d'état terminal 0 et de transitions : (0, a, 1), (0, b, 0), (0, c, 0), (1, b, 1), (1, c, 2), (2, a, 2), (2, b, 0), (2, c, 1).

◇