Ensembles et Fonctions

Exercice 1 Calculer l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties de S pour
1. $S = \{1, 2, 3\}$
2. $S = \{1, \{1, 4\}\}$. ♢

Exercice 2 Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que :
1) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{A \cap B}$.
2) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C$. ♢

Exercice 3 Soient A, B, C trois parties de E. Montrer que

$$\big(A \cup B \subseteq A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B \subseteq A \cap C\big) \Longrightarrow B \subseteq C.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité $B = C$? ♢

Exercice 4 1) Trouver un exemple d'application qui n'est ni injective, ni surjective.
2) Soit $f\colon A \longrightarrow B$ une application. Montrer que

$$f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall X, Y \subseteq A,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$ ♢

Exercice 5 Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :
(i) Si $E \neq \emptyset$ alors f est injective si et seulement si f a un inverse à gauche, c'est-à-dire il existe une application $r\colon F \longrightarrow E$ telle que $r \circ f = id_E$. L'application r est surjective et s'appelle une rétraction de f.
(ii) f est surjective si et seulement si f a un inverse à droite, c'est-à-dire il existe une application $s\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ s = id_F$. L'application s est injective et s'appelle une section de f.
(iii) f est bijective si et seulement si f a un inverse, c'est-à-dire il existe une application $f^{-1}\colon F \longrightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$. L'application f^{-1} est une bijection et s'appelle la bijection réciproque de f. ♢

Exercice 6 Soit A et B deux parties disjointes d'un ensemble E. Réaliser une bijection entre $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$. ♢

Exercice 7 Démontrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. ♢

Exercice 8 Si $n < m$, il n'existe pas d'injection de $[m]$ dans $[n]$. Une formulation plus imagée de ce résultat est le “principe des tiroirs” (ou “pigeon-hole principle”), à savoir: si $n < m$ et que l'on veut placer m chemises dans n tiroirs alors un tiroir au moins contiendra plusieurs chemises. Plus précisément, montrer qu'un tiroir contiendra au moins un nombre entier $p \geq \dfrac{m}{n}$ chemises. ♢

Exercice 9 1. On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il a le même cardinal que $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (on pourra montrer que $(x, y) \mapsto 2^y(2x + 1) - 1$, ou bien $f(x, y) = y + \big(0 + 1 + 2 + \cdots + (x + y)\big)$, définit une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$). ♢

Exercice 10 Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. ♢

Exercice 11 * Soit A un ensemble infini. Soit $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable tel que A et B sont disjoints. Démontrer qu'il existe une bijection entre $A \cup B$ et A. ♢

Exercice 12 Soit $*$ une opération binaire sur un ensemble E. Démontrer que si $*$ admet un élément neutre, cet élément neutre est unique. $\diamondsuit$

Exercice 13 Montrer que $(\mathbb{N}, +, 0)$ (resp. $(P(E), \cup, \emptyset)$) sont des monoïdes commutatifs. $\diamondsuit$

Exercice 14 A étant un alphabet, l'ensemble des mots de A^* de longueur paire est-il un monoïde ? $\diamondsuit$

Exercice 15 Considérer la relation $R = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ sur $X = \{1,2,3\}$. Déterminer si R est

1. réflexive,
2. symétrique,
3. transitive. $\diamondsuit$

Exercice 16 Soient $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,3,5\}$, et soit $R \subset A \times B$ définie par $(a,b) \in R$ ssi $a < b$.

1. Écrire R comme un ensemble de paires ordonnées.
2. Tracer R sur un diagramme $A \times B$.
3. Trouver le domaine de R et le co-domaine de R^{-1}.
4. Trouver $R^{-1}.R$. $\diamondsuit$

Exercice 17 Soit T la relation sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$xTy \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x \in [n, n+1] \text{ et } y \in [n, n+1]$$

Tracer le graphe de la relation T. $\diamondsuit$

Exercice 18 La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$ définie par "$n \mathcal{R} m$ si et seulement si $m = n+1$" est-elle symétrique? réflexive? transitive? Quelles sont les relations $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^*$? $\diamondsuit$

Exercice 19 La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$ définie par "$n \mathcal{R} m$ si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1" est-elle transitive? $\diamondsuit$

Exercice 20 Soit T la relation sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ définie par

$$xTy \text{ ssi } 0 \leq x - y \leq 1$$

i. Exprimer T et T^{-1} comme sous-ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et tracer le graphe des relations.
ii. Montrer que $T \circ T^{-1} = \{(x,z) : |x - z| \leq 1\}$. $\diamondsuit$

Exercice 21 Démontrer que pour toutes paires de relations $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. $\diamondsuit$

Exercice 22 Soit E un ensemble fini: $E = \{e_1, ..., e_n\}$, et soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On représente $\mathcal{R}$ par une matrice $M_{\mathcal{R}}$ de dimension $n \times n$, à éléments dans $\{0,1\}$ de la façon suivante:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \mathcal{R} e_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Quelle est la propriété de $M_{\mathcal{R}}$ caractérisant le fait que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique? réflexive? irréflexive? antisymétrique?
2) Si on connaît $M_{\mathcal{R}}$ et $M_{\mathcal{R}'}$, comment peut-on calculer $M_{\mathcal{R}^{-1}}$, $M_{\overline{\mathcal{R}}}$ et $M_{\mathcal{R}.\mathcal{R}'}$. $\diamondsuit$

Exercice 23 Soit $R \subset A \times A$ une relation. Démontrer que:

1. R est réflexive ssi $\Delta_A \subset R$, où $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$ est appelé *relation diagonale.*
2. R est symétrique ssi $R = R^{-1}$
3. R est transitive ssi $R.R \subset R$
4. R réflexive implique $R.R \supset R$ et $R.R$ réflexive
5. R symétrique implique $R.R^{-1} = R^{-1}.R$
6. R transitive implique $R.R$ transitive. ♢

Exercice 24 Considérons l'ensemble $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, c'est-à-dire l'ensemble des paires ordonnées d'entiers positifs dont le second est non nul. Soit R définie sur $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ par

$$(a,b)R(c,d) \text{ ssi } ad = bc$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence. ♢

Exercice 25 Soit R une relation d'équivalence dans A et soit $[a]$ la classe d'équivalence de $a \in A$. Montrer que :
1. pour chaque $a \in A$, $a \in [a]$
2. $[a] = [b]$ ssi $(a,b) \in R$
3. si $[a] \neq [b]$ alors $[a]$ et $[b]$ sont disjointes.
4. l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de A. ♢

Exercice 26 Soit E un ensemble d'ensembles ; on définit sur E la relation $\sim$ par : $A \sim B$ ssi il existe une bijection $f : A \to B$. Démontrer que pour tout ensemble d'ensembles E, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence. En particulier, $|A| = |B|$ est une relation d'équivalence. ♢

Relations d'ordre

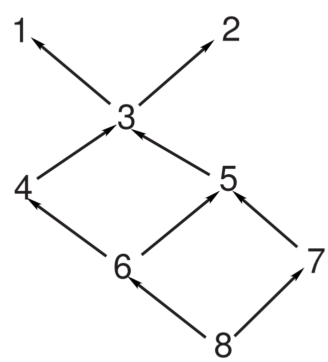

Figure 1 Représentation de l'ensemble ordonné W

Exercice 27 Soit $W = \{1, 2, \ldots 7, 8\}$ ordonné comme dans la ?? , par un ordre large (*i.e.* on suppose que $\forall v \in W \; v \leq v$). Considérer le sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W.
1. Trouver l'ensemble des majorants de V
2. Trouver l'ensemble des minorants de V.
3. Est-ce que $sup(V)$ existe?
4. Est-ce que $inf(V)$ existe? ♢

Exercice 28 Soit $A = \{a, b, c\}$ ordonné comme l'indique le diagramme suivant

$$b \longrightarrow a \longleftarrow c$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles non-vides et totalement ordonnés de A ; $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par inclusion. Représenter graphiquement l'ordre de $\mathcal{A}$. ♢

EXERCICE 29 Soit $A = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; A est ordonné par la relation "x divise y".

1. Vérifier que cette relation est un ordre.
2. Déterminer les éléments minimaux de A
3. Déterminer les éléments maximaux de A. ♢

EXERCICE 30 On se place dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Existe-t-il une borne sup et une borne inf pour tout sous-ensemble de 2 éléments ?

2) Soient les ensembles $A = \{6, 15, 21\}$ et $B = \{1, 6, 14, 21\}$. Donner les minorants et majorants de A (resp. B). A (resp. B) possède-t-il un minimum ? un maximum ?

3) Soit $A = \{3, 6, 12, 15\}$. Donner les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, les éléments maximaux, minimaux. Discuter. ♢

EXERCICE 31 Montrer que les ensembles ordonnés $\mathcal{P}\{a, b, c\}$ muni de la relation d'inclusion et $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$ muni de la relation de division (dans $\mathbb{N}$) sont isomorphes. ♢

EXERCICE 32 Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'ensembles. $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par inclusion et soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{A}$.

1. Démontrer que si $A \in \mathcal{A}$ est un majorant de $\mathcal{B}$, alors $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} \subset A$
2. Est-ce que $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ est un majorant de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$? ♢

EXERCICE 33 Donner un exemple d'ensemble ordonné qui a exactement un élément maximal mais qui n'a pas de maximum. ♢

EXERCICE 34 ** Soit X un ensemble partiellement ordonné. Alors il existe un sous-ensemble Y totalement ordonné de X t.q. Y n'est pas un sous-ensemble propre des autres sous-ensembles totalement ordonnés de X. ♢

EXERCICE 35 * Soit R une relation, $R \subset A \times B$. Supposons que le domaine de R soit A. Alors il existe un sous-ensemble f^* de R tel que f^* est une fonction de A vers B. ♢