LICENCE Structures Discrètes

Examen 10 Juin 2005. Durée 2 heures

Documents interdits – Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 On se place dans $E = \{1, 2, 3, 6, 9, 11, 33, 66\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.

2) E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 3, 6, 9, 11\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? ♢

Exercice 2 Soit l'automate $\mathcal{A}$ défini sur l'alphabet $\{a, b\}$, d'états 0, 1, 2, 3, 4, 5, d'état initial 0, d'état final 4 et de transitions $0.a = 1$, $0.b = 2$, $1.a = 3$, $1.b = 3$, $2.a = 3$, $2.b = 3$, $3.a = 4$, $3.b = 5$, $4.a = 4$, $4.b = 4$, $5.a = 5$ et $5.b = 4$.

1) Dessiner $\mathcal{A}$.

2) Minimiser $\mathcal{A}$. ♢

Exercice 3 On se place dans le calcul des prédicats, et on rappelle que les formules sont définies inductivement comme suit (T désigne l'ensemble des termes formé à partir des symboles de fonction de F et des variables de X) :

(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\, F$ et $\exists x\, F$ sont des formules.

Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables liées dans une formule. On notera $L(p)$ l'ensemble des variables liées dans la formule p. Indication : on rappelle qu'une variable est liée dans une formule si elle a toutes ses occurrences liées dans cette formule. ♢

Exercice 4 Soit l'automate $\mathcal{A}$ défini sur l'alphabet $\{a, b\}$, d'états 1, 2, 3, d'état initiaux 1 et 2, d'état final 3 et de transitions $1.a = 1$, $1.b = 3$, $2.a = 3$ et $2.b = 2$.

1) Dessiner $\mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? complet ? Justifiez vos réponses.

3) Écrire les équations permettant de trouver le langage reconnu par $\mathcal{A}$ et donner une expression rationnelle pour ce langage.

4) Déterminiser et compléter $\mathcal{A}$. ♢

Exercice 5 Soit L un alphabet contenant la constante a, la fonction unaire s et les prédicats binaires Arc et $Chem$. On définit une interprétation I sur le domaine $E = \mathbb{N}$, avec $a_I = 0$, et $s, Arc, Chem$ sont respectivement interprétés par

- $s_I(n) = n + 1$
- $Arc_I(n, p) = vrai$ si et seulement si $p = n + 1$, et
- $Chem_I(n, p) = vrai$ si et seulement si $p = n + 1$.

Soient les formules

$F_1 = \forall x Arc(x, s(x))$,

$F_2 = \forall x \forall y \Big(Arc(x, y) \supset Chem(x, y) \Big)$ et

$F_3 = \forall x \forall y \forall z \Big(\big(Arc(x, y) \wedge Chem(y, z) \big) \supset Chem(x, z) \Big)$.

I est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2, 3$? I est-elle modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$? Justifiez vos réponses. ♢

1. 1)

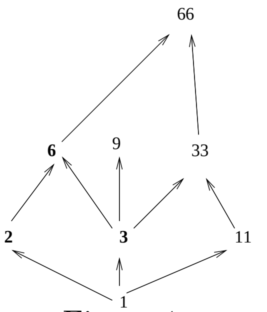

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? oui 1 divise tous les éléments de E.
un maximum ? Non car 9 ne divise pas 66.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 3, 6, 9, 11\}$ de E. Donner les majorants : aucun
les minorants de A : $\{1\}$.
Donner la borne supérieure : aucune
la borne inférieure : 1.
Donner les éléments maximaux : 6,9,11.
les éléments minimaux : 2,3,11.
A admet-il un maximum ? NON .
Un minimum ? NON.

2.

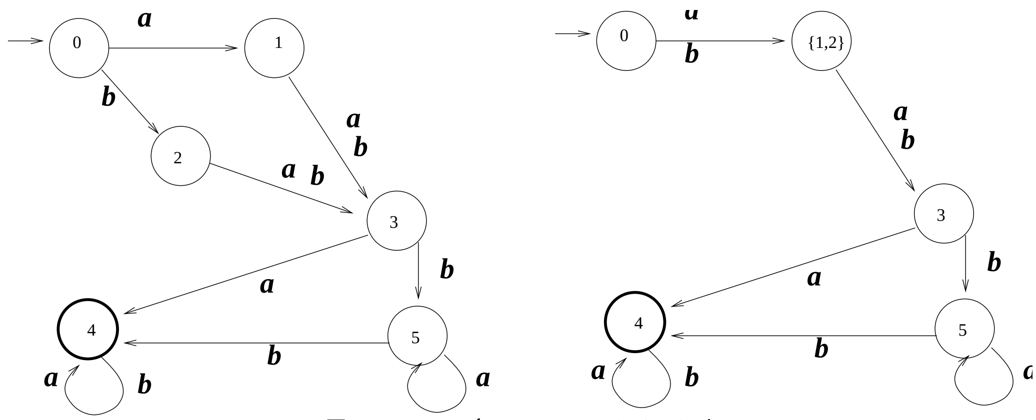

Figure 2 $\mathcal{A}$ et son minimisé

3. Soit $F(p)$ l'ensemble des variables libres dans la formule p (vu en cours).

Base : si $p = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $L(p) = \emptyset$,

Induction : $L(\neg p) = L(p)$

$$L(p * q) = \Big(L(p) \setminus F(q)\Big) \cup \Big(L(q) \setminus F(p)\Big) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\}$$

$$L(\forall x p) = L(\exists x p) = L(p) \cup \{x\}$$

4. 2) Non déterministe car deux états initiaux, non complet car pas de transition au départ de 3.
3)

$$x_{1,3} = a x_{1,1} + b x_{3,3} \quad ,$$

$$x_{2,3} = b x_{2,2} + a x_{3,3} \quad ,$$

$$x_{3,3} = \varepsilon \quad ,$$

d'où

$x_{1,3} = a * b \quad , \quad x_{2,3} = b^*a$ et $x = a^*b + b^*a$.

1) et 4)

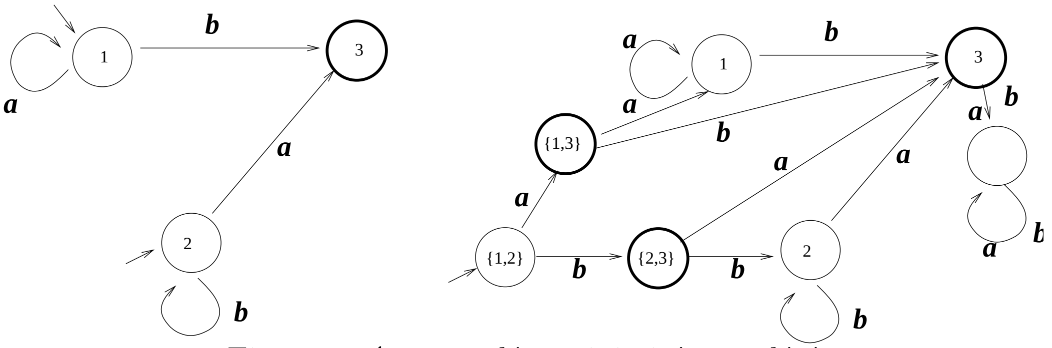

Figure 3 $\mathcal{A}$ et son déterminimisé complété

5.

$I \models F_1$, $I \models F_2$, $I \not\models F_3$ car ($y = x + 1$ et $z = y + 1$) n'implique pas $z = x + 1$ dans $\mathbb{N}$, et donc $I \not\models \{F_1, F_2, F_3\}$.