LI214 – LICENCE Structures Discrètes

Examen 20 Janvier 2005. Durée 3 heures.

Documents interdits

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 On considère les quatre applications suivantes définies de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$:

$f_1(n) = n - 1$
$f_2(n) = n^2 + 1$
$f_3(n) = n^3$
$f_4(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne l'arrondi à l'entier inférieur de $n/2$ (par exemple $\lfloor 3/2 \rfloor = 1$, $\lfloor -1/2 \rfloor = -1$).

1) Lesquelles sont injectives ? surjectives ? Justifiez vos réponses.
2) En déduire une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui n'est pas l'identité. ♢

Exercice 2 Montrer que pour tout entier n positif ou nul, 6 divise $n^3 - n$ (on rappelle que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$). ♢

Exercice 3 1. (i) Rappelez la définition inductive des arbres binaires.
(ii) Rappelez la définition inductive de $n(t)$ (le nombre de nœuds de l'arbre binaire t) et de $ar(t)$ (le nombre d'arêtes de l'arbre binaire t).
2. Soit t un arbre binaire non vide; montrez par induction sur t que $n(t) = ar(t) + 1$. ♢

Exercice 4 On se place dans $E = \{2, 3, 4, 6, 7, 21, 126, 504\}$ ordonné par la relation "x divise y".
1) Représentez cette relation d'ordre sur E par un graphe.
2) E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 7, 21\}$ de E. (i) Donnez les majorants, minorants de A. (ii) Donnez la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). (iii) Donnez les éléments maximaux, minimaux de A. (iv) A admet-il un maximum ? un minimum ? Justifiez vos réponses. ♢

Exercice 5 On se place dans le calcul propositionnel. Soient les formules $F = (p \supset q) \supset r$ et $G = p \supset (q \supset r)$.
1. Mettez F et G sous forme normale disjonctive (somme de produits).
2. F (resp. G) est-elle satisfaisable ? F (resp. G) est-elle une tautologie ? Justifiez vos réponses.
3. Montrez que F et G ne sont pas équivalentes. ♢

Exercice 6 On se place dans le calcul des prédicats, et on rappelle que les formules sont définies inductivement comme suit :

(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables libres dans une formule. On notera $L(p)$ l'ensemble variables libres dans la formule p. Indication : on rappelle qu'une variable est libre dans une formule si elle a au moins une occurrence libre dans cette formule ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 7 Donnez des formules exprimant dans le langage de *Tarski's World* que :

1. Il y a au moins deux dodécaèdres.
2. Tout objet x derrière lequel il n'y a rien est un cube.
3. Si un cube est à droite d'un dodécaèdre mais pas derrière lui, alors il est de la même taille que le dodécaèdre.

(On rappelle les prédicats de *Tarski's World* : Cube(x) ("x est un cube"), Dodec(x) ("x est un dodécaèdre"), Smaller(x,y) ("x est plus petit que y"), Larger(x,y) ("x est plus grand que y"), BackOf(x,y) ("x est derrière y"), RightOf(x,y) ("x est à droite de y").) ♢

EXERCICE 8 Soit l'automate $\mathcal{A}$ d' états 0, 1, 2, d'état initial 0, d'état terminal 2 et de transitions : $(0, a, 0)$, $(0, a, 1)$, $(0, a, 2)$, $(0, b, 1)$, $(1, b, 2)$.

1. Dessinez l'automate $\mathcal{A}$.
2. L'automate $\mathcal{A}$ est-il complet ? L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? Justifiez vos réponses.
3. Ecrivez les équations correspondant à $\mathcal{A}$ et résolvez-les pour trouver le langage reconnu par $\mathcal{A}$.
4. Déterminisez puis complétez $\mathcal{A}$. ♢

EXERCICE 9 Minimisez l'automate $\mathcal{A}'$ de la figure figure 1, qui a 0 comme état initial et 0 et 3 comme états finaux. ♢

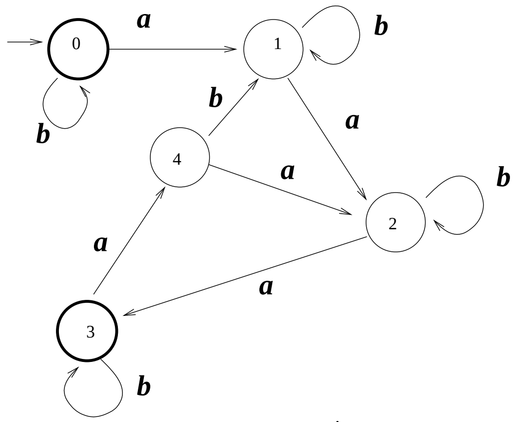

Figure 1 $\mathcal{A}'$

1. 1 . f_1 est injective, surjective et donc bijective.

f_2 n'est ni injective ($f_2(n) = f_2(-n)$) , ni surjective (-1 n'est pas dans l'image de f_2)

f_3 est injective (

– soit remarquer que la fonction $f\colon x \longrightarrow x^3$ est monotone croissante, donc ne peut pas prendre 2 fois la même valeur,

– soit preuve directe : si $f_3(n) = f_3(p)$, alors soit $n = p$ soit $n^2 + p^2 + np = 0$ qui a comme solution $n = p = 0$ ou $n = p(-1 \pm i\sqrt{-3})/2$, non entières) ,

non surjective (tout entier n'est pas un cube).

f_4 est non injective ($f_4(3) = f_4(2)$) mais surjective, car $\forall n\ n = f_4(2n)$)

2. f_1.

2. Par induction sur n. Base : c'est clair pour $n = 0$.

Induction : supposons que 6 divise $n^3 - n$, alors $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + 3n^2 + 3n = n^3 - n + 3n(n+1)$ mais alors 6 divise $3n(n+1)$ (puisque l'un de n ou $n+1$ est pair) et aussi $n^3 - n$, donc 6 divise leur somme.

3. 1.(B) $\emptyset \in AB$ (il s'agit de l'arbre vide), (I) $g, d \in AB \Longrightarrow \forall a \in A$, $(a, g, d) \in AB$ (l'arbre de racine a, de fils gauche g et de fils droit d). On a $n(\emptyset) = 0$ et $n(\ (a, g, d)\ ) = 1 + n(g) + n(d)$, et

$$ar(\ (a,g,d)\ ) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = d = \emptyset, \\ 1 + ar(g) & \text{si } d = \emptyset \text{ et } g \neq \emptyset, \\ 1 + ar(d) & \text{si } g = \emptyset \text{ et } d \neq \emptyset, \\ 2 + ar(g) + ar(d) & \text{si } g \neq \emptyset \neq d. \end{cases}$$

2. Soit $t = (a, g, d)$ un arbre binaire non vide. Si $g = d = \emptyset$ on a $n(t) = 1$ et $ar(t) = 0$, et donc $n(t) = ar(t) + 1$. Sinon, on a si $d = \emptyset$ et $g \neq \emptyset$, $ar(t) = 1 + ar(g)$ et $n(t) = 1 + n(g)$, d'où le résultat. De même si $g = \emptyset$ et $d \neq \emptyset$. Enfin si $g \neq \emptyset \neq d$, $ar(t) = 2 + ar(g) + ar(d) = n(g) + n(d) = n(t) - 1$.

4.

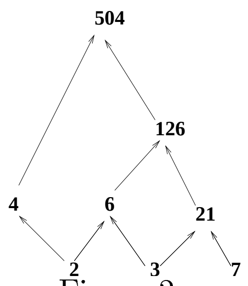

Figure 2

2) E admet-il un minimum ? non, car 2,3,7 premiers entre eux. Un maximum ? oui car tous les éléments de E divisent 504.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 7, 21\}$ de E. Les majorants : 126, 504. Les minorants de A : il n'y en a pas. La borne supérieure : 126, la borne inférieure : il n'y en a pas. Les éléments maximaux : 21,6. Les éléments minimaux : 6,7.

A admet-il un maximum ? NON (2 maximaux incomparables). un minimum ? NON (2 minimaux incomparables).

5. 1. $(p \wedge \neg q) \vee r$ et $\neg p \vee \neg q \vee r$, ou bien $p\bar{q} + r$ et $\bar{p} + \bar{q} + r$.

2. Toutes deux satisfaisables (si $I(r) = 1$ alors $I(F) = I(G) = 1$) et aucune n'est une tautologie (si $I(r) = 0$ et $I(p) = I(q) = 1$, alors $I(F)) = I(G) = 0$).

3. Pour p faux et r faux, soit $I(p) = I(r) = 0$, on a $I(F) = 0$ et $I(G) = 1$: F et G ne sont pas équivalentes.

6. Base : si $p = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $L(p) = Var(t_1, \ldots, t_n)$ où $Var(t_1, \ldots, t_n)$ désigne l'ensemble de toutes les variables qui figurent dans $t_1, \ldots, t_n$,

$$\begin{aligned} \text{Induction : } L(\neg p) &= L(p) \\ L(p * q) &= L(p) \cup L(q) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\} \\ L(\forall x p) &= L(\exists x p) = L(p) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

7. 1. Il y a au moins deux dodécaèdres: $\exists y \exists x\ (Dodec(x) \wedge Dodec(y) \wedge \neg(x = y))$.

2. $\forall x(\neg \exists y(BackOf(y, x)) \longrightarrow Cube(x))$

3. $\forall x \forall y((Cube(x) \wedge Dodec(y) \wedge RightOf(x, y) \wedge \neg BackOf(x, y)) \longrightarrow \neg(Smaller(x, y) \vee Larger(x, y))))$

8. 2. non déterministe (3 transitions avec a au départ de 0), et non complet (pas de transitions avec a au départ de 1).

3. $x_{0,2} = (a + b)x_{1,2} + ax2, 2 + ax_{0,2} \quad x_{2,2} = \varepsilon \quad x_{1,2} = bx_{2,2}$

d'où $x_{1,2} = b \quad , \quad x_{0,2} = L(\mathcal{A}) = a^*((a + b)b + a)$

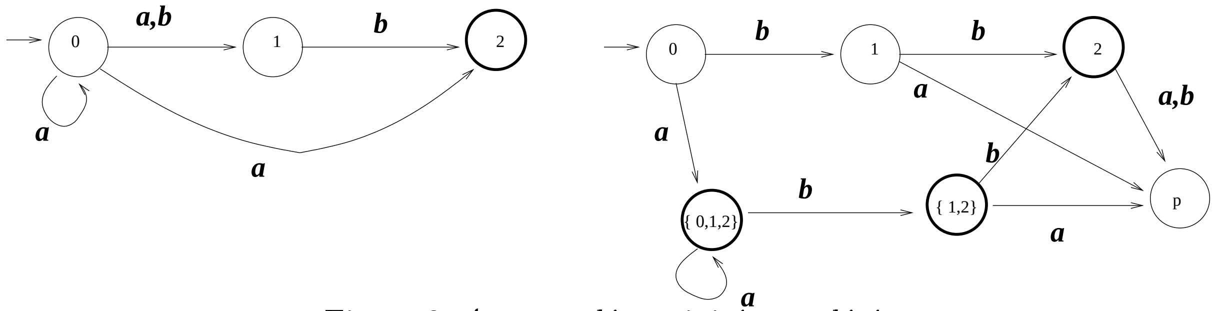

Figure 3 $\mathcal{A}$ et son déterminisé complété

9.

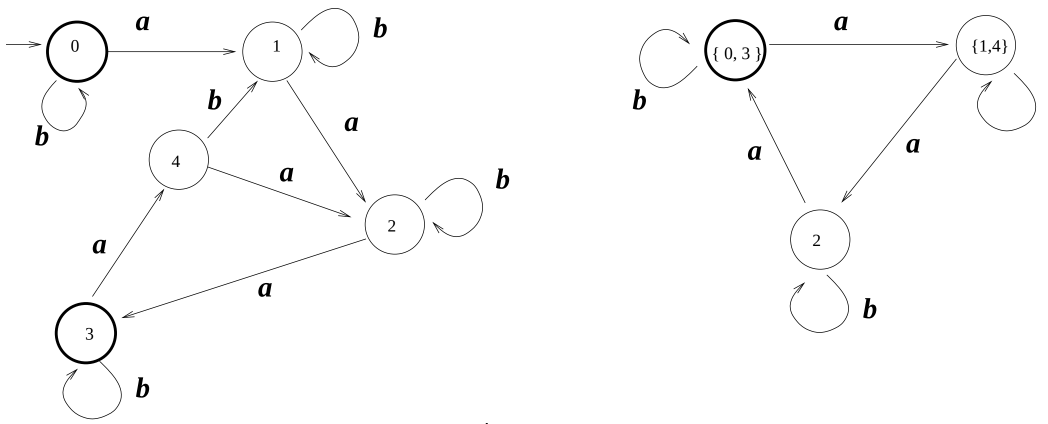

Figure 4 $\mathcal{A}'$ et son miniminisé