LICENCE Structures Discrètes

Examen 20 Janvier 2006. Durée 2 heures.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 Soit $F_0 = \{a\}$, $F_1 = \{s\}$, $F = F_0 \bigcup F_1$. L'ensemble T des termes construits sur F est $T = \{a, s\big(a\big), s\big(s\big(a\big)\big), \ldots\}$. On définit $s^n(a)$ par : (B) $s^0(a) = a$, et (I) $s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$.

Soient $h\colon F_0 \longrightarrow \mathbb{N}$, et $h_s\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; soit h^* la fonction de T dans $\mathbb{N}$ définie par :

(B) Si $t \in F_0$, $h^*(t) = h(t)$,

(I) Si $t = s\big(t'\big)$, $h^*(t) = h_s(h^*(t'))$.

Calculez h^* si $h(a) = 1$, $h_s(k) = 2k - 1$. Vous justifierez votre réponse en donnant une preuve par induction. ♢

Exercice 2 On se place dans $E = \{3, 5, 6, 15, 21, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représentez cette relation d'ordre par un graphe.

2) E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 15, 21, 60\}$ de E. Vous justifierez *toutes* vos réponses. Donnez les majorants, minorants de A dans E. Donnez la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent) dans E. Donnez les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? ♢

Exercice 3 Soient $F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1, G$ des formules. Le théorème de déduction peut s'énoncer

$$\forall n > 0 \quad (F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow ((F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$$

Démontrez ce théorème par induction sur n. Indication: on rappelle que $(F \supset G) \Longleftrightarrow (\neg F \vee G)$ ♢

Exercice 4 On se place dans le calcul des prédicats. Soit $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{R}$, C, X) un ensemble de symboles de fonctions (resp. symboles de relations, symboles de constantes, symboles de variables). On rappelle que l'ensemble T des termes sur $\mathcal{G} \cup X$ est défini inductivement par:

(B) $C \cup X \subseteq T$,

(I) pour tout f d'arité n dans $\mathcal{G}$, et pour tous $t_1, \ldots, t_n$ dans T, $f\big(t_1, \ldots, t_n\big) \in T$.

Les formules sont définies inductivement par :

(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables libres dans une formule F.

On notera $V(t)$ l'ensemble des variables figurant dans le terme t. On notera $L(F)$ l'ensemble des variables libres dans la formule F. Indication : on rappelle qu'une variable est libre dans une formule si elle a toutes ses occurrences libres dans cette formule. ♢

Exercice 5 Un arbre binaire est dit *complet* s'il est non vide et si pour chaque nœud de l'arbre, les hauteurs des sous-arbres gauche et droit sont égales. Notons $h(t)$ la hauteur de l'arbre binaire t. Les arbres binaires complets ABC forment donc le sous-ensemble des arbres binaires défini inductivement par :

(B) pour tout $a \in A$, $(a, \emptyset, \emptyset) \in ABC$. On notera $(a, \emptyset, \emptyset)$ par a pour abréger.

T.S.V.P.

(I) si $t_1, t_2 \in ABC$ et si $h(t_1) = h(t_2)$, alors pour tout $a \in A$ $(a, t_1, t_2) \in ABC$.

Rappelons que la hauteur de $(a, \emptyset, \emptyset)$ (ou a) est 1.

On définit 3 fonctions n, f et ar sur ABC : pour $t \in ABC$, soient $n(t)$ le nombre de nœuds de t, $f(t)$ le nombre de feuilles de t et $ar(t)$ le nombre d'arêtes de t.

1) Donnez des exemples d'arbres binaires complets de hauteur 1, 2 et 3 sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

2) Donnez une définition inductive des fonctions n, f et ar.

3) Montrez par induction sur $k = h(t)$ que si t est un arbre binaire complet de hauteur k, alors

(1) $f(t) = 2^{k-1}$.

(2) $n(t) = 2^k - 1$. ♢

Exercice 6 On se donne un langage comprenant deux symboles de prédicats (ou relations) binaires R et $=$ ($=$ sera toujours interprété comme l'égalité).

1. Ecrivez une formule du calcul des prédicats exprimant que la relation binaire R est une relation d'ordre large.

2. Ecrivez une formule du calcul des prédicats exprimant que l'ordre R a un minimum. ♢

Exercice 7 Ecrivez, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski,* `Tet`, `Cube`, `Dodec` `Smaller`, `Larger` *et uniquement ceux-ci*, les définitions des prédicats suivants :

(1) $LessFig[x, y]$ pour *"x est une figure plus petite que y"* (fonction du nombre de faces).

(2) $EqFig[x, y]$ pour *"x et y sont la même figure"*, c'est-à-dire ont le même nombre de faces. (vous pouvez utiliser le prédicat $LessFig$ ici si vous le souhaitez).

(3) $EqSize[x, y]$ pour *"x est de la même taille que y"*.

♢

Exercice 8 Soit l'automate $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) d' état initial et terminal 0, et de transitions : $(0, a, 0)$, (resp. d' états 0, 1, d'état initial 0, d'état terminal 1 et de transitions : $(0, b, 1)$, $(0, b, 0)$) .

1. Dessinez les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

2. L'automate $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est-il complet ? L'automate $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) est-il déterministe ? Justifiez vos réponses.

3. Ecrivez l(es) équation(s) correspondant à $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) et résolvez-les pour trouvez le langage $L(\mathcal{A})$ reconnu par $\mathcal{A}$ (resp. L(B) reconnu par $\mathcal{B}$).

4. Déterminisez et complétez $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Soient $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ les automates déterministes complets obtenus. Dessinez $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$.

5. Construisez à l'aide de $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ un automate $\mathcal{C}$ reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$. Dessinez $\mathcal{C}$. ♢

1. On montre par induction sur n que $h^*(s^n(a)) = 1$.
Base : C'est vrai si $n = 0$, car $h^*(a) = h(a) = 1$.
Induction : Supposons $h^*(s^n(a)) = 1$, alors $h^*(s^{n+1}(a)) = h_s(h^*(s^n(a))) = h_s(1) = 1$.

2. 1)

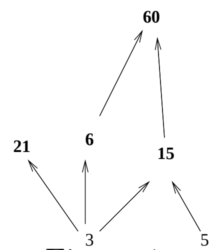

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? non 3 et 5 non comparables entre eux. un maximum ? Non car 21 ne divisent pas 60.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 15, 21, 60\}$ de E. Donnez les majorants : il n y en a pas (21 ne divise pas 60). Les minorants de A : $\{3\}$.

Donnez la borne supérieure : il n y en a pas, car pas de majorant. la borne inférieure : 3.

Donnez les éléments maximaux : 21,60. les éléments minimaux : 6, 15, 21.

A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? non plus.

3. Base : $n = 1$, évident.
Induction : supposons $(F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow (F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1 \supset G)$.
Par l'indication,
$(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow (\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots)))$;
par l'hypothèse d'induction pour $n - 1$
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow \neg F_n \vee ((F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$;
par l'indication :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow \neg F_n \vee (\neg (F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G)$;
par l'associativité de $\vee$:
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow (\neg F_n \vee \neg (F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1)) \vee G$;
par les lois de Morgan :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow \neg (F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G$;
par l'indication :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow (F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G$

4.

Base : si $F = R(t_1, \ldots, t_n)$, alors $L(F) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$,

$$\begin{aligned} \text{Induction : } L(\neg F) &= L(F) \\ L(F * F') &= \Big(L(F)\Big) \cup \Big(L(F')\Big) \qquad \text{si } * \in \{\vee, \wedge, \supset\} \\ L(\forall x F) = L(\exists x F) &= L(F) \setminus \{x\} \end{aligned}$$

5. 1) a, (a,a,a), $(a,(a,a,a),(a,a,a))$

2) Définition inductive des fonctions n, f et ar.

(B) $n(a) = 1$, $f(a) = 1$, $ar(a) = 0$.

(I) $t_1, t_2 \in ABC \implies \forall a \in A$, $n((a,t_1,t_2)) = n(t_1)+n(t_2)+1$, $f((a,t_1,t_2) = f(t_1)+f(t_2)$, $ar((a,t_1,t_2)) = ar(t_1) + ar(t_2) + 2$

3)

(B) si $k = 1$, $t = a \in A$ et $f(a) = 1 = 2^{1-1} = 2^0$

(I) si $t' = (a,t_1,t_2)$ est un arbre binaire complet de hauteur $k+1$, alors $h(t_1) = h(t_2) = k$ et $f(t_1) = f(t_2) = 2^{k-1}$ d'où $f(t') = f(t_1) + f(t_2) = 2 \times 2^{k-1} = 2^k$.

(B) $\forall a \in A, n(a) = 1 = 2^1 - 1$, et

(I) si $t' = (a,t_1,t_2)$ est un arbre binaire complet de hauteur $k+1$, alors $h(t_1) = h(t_2) = k$ et $n(t_1) = n(t_2) = 2^k - 1$ d'où $n(t') = n(t_1) + n(t_2) + 1 = 2 \times (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$.

6. 1. $F_R \wedge F_A \wedge F_T$ et 2. $F_R \wedge F_A \wedge F_T \wedge F_m$ où : $F_R = \forall x R(x,x)$

$F_A = \forall x \forall y\ ((R(x,y) \wedge R(y,x)) \supset x = y)$

$F_T = \forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(y,z))$

$F_m = \exists x \forall y\ R(x,y)$

7.

(1) $LessFig[x,y]$ pour *"x est une figure plus petite que y"*

$\neg\mathtt{Dodec}(x) \wedge (\mathtt{Tet}(x) \supset \neg\mathtt{Tet}(y)) \wedge (\mathtt{Cube}(x) \supset \mathtt{Dodec}(y))$

(2) $EqFig[x,y]$ pour *"x et y sont la même figure"*.

$\neg LessFig[x,y] \wedge \neg LessFig[y,x]$ ou bien

$\big(\mathtt{Tet}(x) \wedge \mathtt{Tet}(y)\big) \vee \big(\mathtt{Cube}(x) \wedge \mathtt{Cube}(y)\big) \vee \big(\mathtt{Dodec}(x) \wedge \mathtt{Dodec}(y)\big)$

(3) $EqSize[x,y]$ pour *"x est de la même taille que y"*.

$\neg\mathtt{Smaller}(x,y) \wedge \neg\mathtt{Larger}(x,y)$

8. 2. $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) non complet : pas de transition sortante par b (resp. a) de l'état 0. L'automate $\mathcal{A}$ est déterministe. $\mathcal{B}$ n'est pas déterministe : 2 transitions sortantes par b de l'état 0.

3. Pour $\mathcal{A}$: $X_{0,0} = \varepsilon + aX_{0,0}$ d'où $X_{0,0} = a^*$

Pour $\mathcal{B}$: $X_{0,1} = bX_{0,1} + bX_{1,1}$ et $X_{1,1} = \varepsilon$ d'où $X_{0,1} = bX_{0,1} + b\varepsilon = bX_{0,1} + b$ et donc $X_{0,1} = bb^* = b^+$.

1, 4, 5. voir figure 2

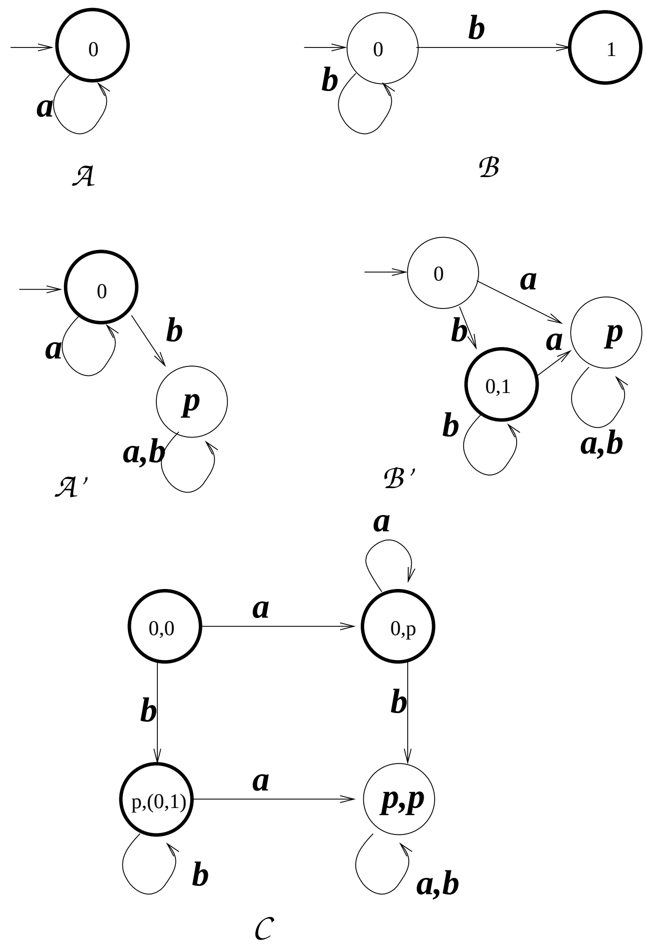
0
a
$\mathcal{A}$
0
b
1
b
$\mathcal{B}$
0
a
b
p
a,b
$\mathcal{A}'$
0
a
b
a
p
0,1
b
a,b
$\mathcal{B}'$
a
0,0
a
0,p
b
b
p,(0,1)
a
p,p
b
a,b
$\mathcal{C}$

Figure 2