LICENCE Structures Discrètes

Examen 11 Janvier 2007. Durée 2 heures.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 L'application $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} n^2 & n \leq 0 \\ n^2+1 & n > 0 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?. Justifiez vos réponses. ♢

Exercice 2 Montrez par récurrence que la somme des cubes des entiers de 1 à n vaut $(n^2(n+1)^2)/4$ pour $n \geq 1$. ♢

Exercice 3 Donnez une définition inductive de l'ensemble $X = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots\}$. ♢

Exercice 4 On se place dans $E = \{2, 3, 5, 6, 9, 15, 18, 90\}$ ordonné par la relation "x divise y".
1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.
2) E admet-il un maximum ? un minimum ? Justifiez vos réponses.
3) Donner les éléments maximaux, minimaux de E.
4) On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 9, 15\}$ de E. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. ♢

Exercice 5 Soit L un alphabet contenant les prédicats binaires $=$, $\neq$ et R. $=$ (resp. $\neq$) sera interprété comme l'égalité (resp. l'inégalité).
1. Que peut-on dire des modèles de la formule $F_1 \wedge F_2$ où F_1: $\forall x \forall y\ (R(x,y) \supset x \neq y)$ F_2: $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \supset R(x,z))$.
2. Donner une formule F telle que tous les modèles de F soient un ensemble muni d'une relation d'équivalence. ♢

Exercice 6 Ecrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski*, `Cube`, `Large`, *=, ≠ et uniquement ceux-ci*, des formules exprimant que :
1. Il y a au moins un grand cube.
2. Tous les cubes sont grands.
3. Il y a au moins deux cubes.
4. Il y a au plus deux cubes

Lesquelles de ces formules admettent-elles un modèle vide ? Justifier les réponses. ♢

Exercice 7 Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.
1. Décrire un automate $\mathcal{A}$ reconnaissant les mots se terminant par b.
2. Décrire un automate $\mathcal{A}'$ reconnaissant les mots ayant un nombre pair de a.
3. Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont-ils déterministes ? complets ?
4. Ecrire les systèmes d'équations correspondant à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.
5. En déduire des expressions rationnelles des langages $L(\mathcal{A})$ et $L(\mathcal{A}')$ reconnus par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.
6. Construire des automates reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{A}')$ et $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}')$ (on rappelle qu'il faut d'abord faire un produit d'automates). ♢

Exercice 8 Question de cours. 1) Donner une définition inductive de l'ensemble AB des arbres binaires.
2) Soient $n(t)$ le nombre de nœuds de t et $ar(t)$ le nombre d'arêtes de t. Donner une définition inductive de n et ar.
3) Montrer par induction que si t est un arbre binaire non vide $n(t) = ar(t) + 1$. ♢

1. Injective car si n, p sont > 0, $n^2+1 = p^2+1$ implique $n = p$, si n, p sont dans ≤ 0, $n^2 = p^2$ implique $n = p$, et si $n > 0$ et $p \leq 0$, on ne peut pas avoir $n^2+1 = p^2$. Non surjective car par exemple 6 n'est ni n^2 ni p^2+1. Donc non bijective.

2. Base : vrai pour $n = 1$. Induction : supposons $\sum_1^n i^3 = (n^2(n+1)^2)/4$, calculons $\sum_1^{n+1} i^3 = \sum_1^n i^3 + (n+1)^3 = (n^2(n+1)^2)/4 + (n+1)^3 = (n+1)^2(n^2+4n+4)/4 = (n+1)^2(n+2)^2/4$, d'où le résultat.

3. Base : $4 \in X$, Induction : $n \in X$ implique que $n+3 \in X$.

4.

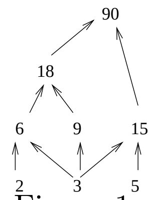

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? non 3 et 5 premiers entre eux. un maximum ? 90 3) Éléments maximaux, minimaux de E ; maximaux : 90 et minimaux :2 5 et 3.

4) On considère le sous-ensemble $A = \{3, 9, 6, 15\}$ de E. A admet-il un maximum ? NON un minimum ? OUI 3 Donner la borne supérieure, 90 la borne inférieure de A: 3 Donner les éléments maximauxde A , 9,6,15, minimaux 3 de A.

5. 1. R est irréflexive et transitive. C'est un ordre strict.

2. $F'_1 \wedge F'_2 \wedge F'_3$ où F'_1: $\forall x\ R(x, x)$ (réflexive) F'_2: $\forall x \forall y\ (R(x, y) \supset R(y, x)$ (symétrique) F'_3: $\forall x \forall y \forall z\ ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \supset R(x, z))$ (transitive).

6. 1. Il y a au moins un grand cube $\exists x[(Cube(x) \wedge Large(x)]$

2. Tous les cubes sont grands. $\forall x\ (\ Cube(x) \supset Large(x)\ )$

3. Il y a au moins deux cubes. $\exists x \exists y[Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge (x \neq y)]$

4. $\forall x \forall y \forall z[(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z)) \supset ((z = x) \vee (z = y) \vee (x = y))]$

2 et 4, car toute formule de la forme $\forall x P(x)$ (quantifiée universellement) peut se traduire sous la forme : $x \in E \Longrightarrow P(x)$ et si E est vide, alors $x \in E$ est automatiquement faux et donc l'implication est vraie ; et pas 1 et 3 puisqu'on y affirme l'existence de certains objets.

7. 1,2,3. $\mathcal{A}$: état 0 initial, 1 final, transitions :
$(0, a, 0), (0, c, 0), (0, b, 1), (1, b, 1), (1, a, 0), (1, c, 0)$. Déterministe et complet.
$\mathcal{A}'$: état $0'$ initial, $0'$ final, transitions :
$(0', a, 1'), (0', c, 0'), (0', b, 0'), (1', b, 1'), (1', a, 0'), (1', c, 1')$. Déterministe et complet.

4,5. Equations : $\mathcal{A}$: $x_{0,1} = (a+c)x_{0,1} + bx_{1,1}$ et $x_{1,1} = (a+c)x_{0,1} + bx_{1,1} + \varepsilon$, d'où $x_{0,1} = (a+c+b^+(a+c))^*b^+$
$\mathcal{A}'$: $x_{0,0} = \varepsilon + (b+c)x_{0,0} + ax_{1,0}$ et $x_{1,0} = (b+c)x_{1,0} + ax_{0,0}$, d'où $x_{0,0} = (b+c+a(b+c)^*a)^*$
6. le produit des systèmes de transitions est:
$(00', a, 01'), (00', c, 00'), (00', b, 10'), (10', b, 10'), (10', a, 01'), (10', c, 00')$
$(01', a, 00'), (01', c, 01'), (01', b, 11'), (11', b, 11'), (11', a, 00'), (11', c, 01')$. Etat initial $00'$.
Etat final pour l'intersection : $10'$, Etats finals pour l'union : $10'$, $00'$ et $11'$.

8. Voir cours.