LICENCE Structures Discrètes

Examen 1er Février 2007. Durée 2 heures.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 1. Trouver une application $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ qui est injective et non surjective. Justifier la réponse.

2. Trouver une application $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ qui est bijective. Justifier la réponse. ♢

Exercice 2 Soit $F_0 = \{a\}$, $F_1 = \{s\}$, $F = F_0 \bigcup F_1$. L'ensemble T des termes construits sur F est $T = \{a, s\big(a\big), s\big(s\big(a\big)\big), \ldots\}$. On définit $s^n(a)$ par : (B) $s^0(a) = a$, et (I) $s^{n+1}(a) = s(s^n(a))$.

Soient $h\colon F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$, et $h_s\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$; soit h^* la fonction de T dans $\mathbb{Z}$ définie par :

(B) Si $t \in F_0$, $h^*(t) = h(t)$,

(I) Si $t = s\big(t'\big)$, $h^*(t) = h_s(h^*(t'))$.

1. Calculez h^* si $h(a) = 3$, $h_s(k) = k - 1$. Vous justifierez votre réponse en donnant une preuve par induction.
2. Trouvez $h(a)$ et h_s tels que l'on ait : $h^*(s^n(a)) = 3^n$. ♢

Exercice 3 1. On se place dans $\mathbb{N}$ ordonné par la relation d'ordre habituelle $\leq$. $\mathbb{N}$ admet-il un maximum ? un minimum ? l'ordre est-il bien fondé ? Justifiez vos réponses.

2. On se place dans $E = \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ (les rationnels strictement positifs) ordonné par la relation d'ordre habituelle $\leq$. E admet-il un maximum ? un minimum ? l'ordre est-il bien fondé ? Justifiez vos réponses.

3. On considère le sous-ensemble $A = \{1 + 1/n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$ de E. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A (s'ils existent).

4. On considère le sous-ensemble $A' = A \cup \{1\}$ de E. A' admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A' (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A' (s'ils existent). ♢

Exercice 4 Laquelle des assertions suivantes est équivalente à l'assertion : “si vous n'êtes pas pour nous, alors vous êtes contre nous”.

(i) “si vous n'êtes pas contre nous, alors vous êtes pour nous”

(ii) “si vous n'êtes pas pour nous, alors vous n'êtes pas contre nous”

(iii) “si vous êtes pour nous, alors vous êtes contre nous”

(iv) “si vous êtes contre nous, alors vous n'êtes pas pour nous”

(v) “si vous êtes pour nous, alors vous n'êtes pas contre nous” ♢

Exercice 5 On considère les formules

$$F_1 = P(a)\ ,\ F_2 = \forall x\,(P(x) \supset Q(x))\ ,\ F_3 = \forall x\,(P(x) \supset P(s^2(x)))\ .$$

On rappelle que $s^2(x)$ est une notation abrégée pour $s(s(x))$. Toutes les interprétations considérées dans les questions 1, 2, et 3 seront telles que : $E_I = \mathbb{N}$ (les entiers naturels), $a_I = 0$, et $s_I(n) = n + 1$.

1. Soit l'interprétation I_1 donnée par $P_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n = 1$, et $Q_{I_1}(n)$ vrai si et seulement si $n \geq 1$. I_1 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
2. Soit l'interprétation I_2 donnée par $P_{I_2}(n)$ faux pour tout n , et $Q_{I_2}(n)$ vrai si et seulement si $n = 0$. I_2 est-elle modèle de F_1 ? de F_2 ? de F_3 ? de $\{F_1, F_2, F_3\}$?
3. Trouver une interprétation I qui soit modèle de $\{F_1, F_2, F_3\}$ et telle que $P_I \neq Q_I$. ♢

Exercice 6 Soit F la formule $(\exists x R(x, y)) \vee \forall y \exists z (R(x, z) \vee R(y, z))$. Trouver une formule prénexe équivalente à F. Est-ce la seule formule prénexe équivalente à F ? ♢

Exercice 7 Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$.

1. Décrire un automate $\mathcal{A}$ reconnaissant les mots commençant par b.
2. Décrire un automate $\mathcal{A}'$ reconnaissant les mots ayant un nombre impair de a.
3. Les automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont-ils déterministes ? complets ?
4. Ecrire les systèmes d'équations correspondant à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.
5. En déduire des expressions rationnelles des langages $L(\mathcal{A})$ et $L(\mathcal{A}')$ reconnus par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.
6. Construire des automates reconnaissant $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{A}')$ et $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}')$ (on rappelle qu'il faut d'abord faire un produit d'automates). ♢

1. 1. L'application définie par $f(n) = \begin{cases} n^2 & n \leq 0 \\ n^2+1 & n > 0 \end{cases}$ injective car si n, p sont > 0, $n^2 + 1 = p^2 + 1$ implique $n = p$, si n, p sont dans ≤ 0, $n^2 = p^2$ implique $n = p$, et si $n > 0$ et $p \leq 0$, on ne peut pas avoir $n^2 + 1 = p^2$. Non surjective car par exemple 6 n'est ni n^2 ni $p^2 + 1$. Donc non bijective.

2. $f(n) = \begin{cases} -2n & n \leq 0 \\ 2n-1 & n > 0. \end{cases}$ injective car 2 valeurs de la forme $-2n$ ($n \leq 0$) ne peuvent être égales, non plus 2 valeurs de la forme $2n - 1$ ($n > 0$); et aucune valeur de la forme $-2n$ (pair) n'est égale à une valeur de la forme $2n - 1$ (impair).

surjective car si $n \in \mathbf{N}$ pair, $f(-n/2) = n$; si $n \in \mathbf{N}$ impair, $f((n + 1)/2) = n$.

2. 1. On montre par induction sur n que $h^*(s^n(a)) = 3 - n$. Base : $n = 0$ et $h^*(a) = 3$. Induction : si $h^*(s^n(a)) = 3 - n$, $h^*(s^{n+1}(a)) = h_s(3 - n) = 3 - n - 1 = 3 - (n + 1)$. 2. $h(a) = 1$ et $h_s(k) = 3k$.

3. 1. minimum 0, pas de maximum, BF car si n est le $k$ième élément d'une suite décroissante strictement, cette suite aura au plus $k+n$ éléments puisqu'il y a au maximum n éléments plus petits que n.

2. E admet-il un minimum ? non un maximum ? Non et non BF.

3. max=sup = 1+1=2, pas de minimum, inf =1, pas d'élément minimal, un seul maximal 1+1=2.

4. min=inf=minimaux=1, max = sup = maximaux =1+1=2.

4. 1pt (i)

5. 1. 1pt N O N N

2. 1pt N O O N

3. 1pt P vrai ssi n pair et Q vrai ssi n pair ou $n = 3$.

6. Une erreur très fréquente a été de renommer les variables libres : c'est faux et à éviter, en effet si F est une sous formule d'une autre formules $G = F \vee P(y)$, renommer l'occurrence libre de y dans F casse le lien entre les 2 occurrences libres de y dans la formule G. *Il faut toujours renommer les variables liées.* Nous obtenons l'une des formes prénexes équivalentes:

$$\exists x' \forall y' \exists z (R(x', y)) \vee (R(x, z) \vee R(y', z))$$
$$\forall y' \exists x' \exists z (R(x', y)) \vee (R(x, z) \vee R(y', z))$$
$$\forall y' \exists z \exists x' (R(x', y)) \vee (R(x, z) \vee R(y', z))$$

7. 1,2,3. $\mathcal{A}$: état 0 initial, 1 final, transitions :

$(0, b, 1), (1, b, 1), (1, a, 1), (1, c, 1),$. Déterministe et non complet.

$\mathcal{A}'$: état $0'$ initial, $1'$ final, transitions :

$(0', a, 1'), (0', c, 0'), (0', b, 0'), (1', b, 1'), (1', a, 0'), (1', c, 1')$. Déterministe et complet.

4,5. Equations : $\mathcal{A}$: $x_{0,1} = bx_{1,1}$ et $x_{1,1} = (a + b + c)x_{1,1} + \varepsilon$, d'où $x_{0,1} = b(a + c + b)*$

$\mathcal{A}'$: $x_{0',1'} = (b + c)x_{0',1'} + ax_{1',1'}$ et $x_{1',1'} = \varepsilon + (b + c)x_{1',1'} + ax_{0',1'}$, d'où $x_{1',1'} = (b + c)^*(\varepsilon + ax_{0',1'})$ et $x_{0',1'} = (b + c + a(b + c)^*a)^*a(b + c)^*$.

6. On complète $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}''$:

$(0, a, p), (0, c, p), (0, b, 1), (1, b, 1), (1, a, 1), (1, c, 1), (p, b, p), (p, a, p), (p, c, p)$.

Ensuite on fait le produit de $\mathcal{A}''$ et $\mathcal{A}'$:

$(00', a, p1'), (00', c, p0'), (00', b, 10'), (10', b, 10'), (10', a, 11'), (10', c, 10'),$ $(p0', a, p1'),$ $(p0', c, p0'),$ $(p0', b, p0')$

$(p1', a, p0'), (p1', c, p1'), (p1', b, p1'), (11', b, 11'), (11', a, 10'), (11', c, 11')$. Etat initial $00'$.

Etat final pour l'intersection : $11'$, Etats finals pour l'union : $10'$, $01'$, $p1'$ et $11'$.