LICENCE LI214 Structures Discrètes

Examen 8 Septembre 2006. Durée 2 heures.
Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs
tout téléphone visible sera confisqué

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

Exercice 1 Soit $A = \{a\}$ un alphabet à une seule lettre. L'ensemble $AB4$ des arbres 4-aires étiquetés sur l'alphabet A est défini inductivement par
(B) $\emptyset \in AB4$ (il s'agit de l'arbre vide),
(I) $t_1, \ldots, t_4 \in AB4 \Longrightarrow (a, t_1, \ldots, t_4) \in AB4$ (l'arbre de racine a, dont les 4 fils de gauche à droite sont $t_1, \ldots, t_4$). L'ensemble $A4S$ des arbres 4-aires stricts étiquetés sur l'alphabet A est défini inductivement par
(B) $(a, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset) \in A4S$ (il s'agit de l'arbre réduit à a),
(I) $t_1, \ldots, t_4 \in A4S \Longrightarrow (a, t_1, \ldots, t_4) \in A4S$ (l'arbre de racine a, dont les 4 fils de gauche à droite sont $t_1, \ldots, t_4$).

Si t est un arbre 4-aire strict alors t est *non vide* et chaque nœud de t a exactement 0 ou 4 fils. Soit $n(t)$ le nombre de nœuds de t.

1) Donner une définition inductive de $n(t)$.

2) Soit b l'application $AB4 \longrightarrow A4S$ définie par :
(B) $b(\emptyset) = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$
(I) $b((a, t_1, \ldots, t_4)) = (a, b(t_1), \ldots, b(t_4))$ (l'arbre de racine a, dont les 4 fils de gauche à droite sont $b(t_1)$ à $b(t_4)$).

Calculer $b(t)$ pour $t = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ puis $t = (a, \emptyset, \emptyset, (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$

3) Montrer par induction que b est une bijection.

4) Montrer par induction que $n(b(t)) = 4n(t) + 1$. ♢

Exercice 2 Soient F et G les formules suivantes

$$F = p \supset (q \supset r) \qquad G = (p \supset q) \supset r$$

1) Mettre F et G en Forme Normale Conjonctive (FNC) et en Forme Normale Disjonctive (FND).

2) F (resp. G) est-elle satisfaisable ? F (resp. G) est-elle une tautologie ? Justifier votre réponse par un exemple ou un contrexemple.

3) F et G sont-elles équivalentes. Justifier votre réponse par une preuve ou un contrexemple. ♢

Exercice 3 Soient $F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1, G$ des formules. Le théorème de déduction peut s'énoncer

$$\forall n > 0 \quad (F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots (F_1 \supset G) \cdots))) \Longleftrightarrow ((F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$$

Démontrer ce théorème par induction sur n. Indication: on rappelle que $(F \supset G) \Longleftrightarrow (\neg F \vee G)$ ♢

Exercice 4 Trouver une formule prénexe équivalente à

$$\exists x P(x) \supset \forall x \big((\exists x Q(x)) \vee R(x) \big)$$ ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 5 On considère l'automate $\mathcal{A}$ ayant pour alphabet $\{a, b\}$, pour états : 0,1,2 ; l'état initial est 0 ; il y a un unique état terminal (ou final) qui est 1. Les transitions sont : $(0, a, 1)$, $(0, a, 2)$, $(1, a, 0)$, $(1, b, 0)$, $(1, b, 2)$, $(2, a, 0)$.

1) Dessiner $\mathcal{A}$.

2) Donner les équations permettant de déterminer le langage L reconnu par $\mathcal{A}$ et donner une expression rationnelle de ce langage L.

3) Déterminiser $\mathcal{A}$.

4) Soit $\mathcal{B}$ l'automate défini comme $\mathcal{A}$, mais dont les états terminaux sont 0 et 2 (on échange les états terminaux et non terminaux de $\mathcal{A}$). $\mathcal{B}$ reconnaît-il le complémentaire de L (justifier votre réponse).

$\diamondsuit$

EXERCICE 6 On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x\ (Cube(x) \vee Tet(x) \vee Dodec(x))$

F_2: $\forall x \forall y\ (Larger(x, y) \supset (Large(x) \vee Small(y)))$

F_3: $\forall x \forall y\ (Larger(x, y) \vee \neg Larger(x, y))$

F_4: $\neg \exists x \exists y\ (Larger(x, y) \wedge Small(x) \wedge Small(y))$

F_5: $\forall x \forall y((BackOf(x, y) \wedge FrontOf(x, y))$

F_6: $\forall x \forall y \forall z\ ((Larger(x, y) \wedge Smaller(x, y)) \supset \neg Between(x, z, y))$

F_7: $\forall x \forall y\ (Cube(x) \vee Tet(y) \vee Larger(x, y))$

F_8: $\forall x \forall y\ (Smaller(x, y) \vee Larger(x, y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world (c'est-à-dire qui sont vraies quels que soient les tétrèdres, cubes et dodédécaèdres qu'on met sur une grille 8×8) ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle(s) formule(s) est(sont) insatisfaisables(s) dans tous les mondes de Tarski's world ?

3. Quelle(s) formule(s) est(sont) une(des) tautologie(s) ? $\diamondsuit$

1. 1) On peut définir n par : $n(\ (a,\emptyset,\ldots,\emptyset)\ ) = 1$, et si $t = (a, t_1, \ldots, t_4) \in A4S$ est un arbre strict, alors $n(t) = 1 + n(t_1) + \cdots + n(t_n)$.

2) $b((a,\emptyset,\emptyset,\emptyset)) = (a, (a,\emptyset,\emptyset,\emptyset), (a,\emptyset,\emptyset,\emptyset), (a,\emptyset,\emptyset,\emptyset))$, et
$b((a,\emptyset,(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset),\emptyset)) = (a,(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset),(a,(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset),(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset),(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset)),(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset))$.

4) b injection : on remarque que $b(t)$ est toujours différent de $\emptyset$, et alors :
(B) si pour $t = (a, t_1, \ldots, t_4) \neq \emptyset$, $b(t) = b(\emptyset)$, alors $b(t_1) = \cdots = b(t_4) = \emptyset$, ce qui est impossible,
(I) on suppose que $b(t_i) = b(t'_i)$ implique $t_i = t'_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$, alors si
$b((a, t_1, \ldots, t_4)) = b((a, t'_1, \ldots, t'_4))$, on en déduit $(a, b(t_1), \ldots, b(t_4)) = (a, b(t'_1), \ldots, b(t'_4))$ et donc
$b(t_i) = b(t'_i)$ pour $i = 1, \ldots, 4$, et $t_i = t'_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$.

b surjection : même démonstration par induction. Pour la base on note que $(a,\emptyset,\ldots,\emptyset) \in A4S$ est l'image par b de $\emptyset$.

4) Soit $P(t)$ la propriété "$n(b(t)) = 4n(t) + 1$".
– si $t = \emptyset$ alors $n(b(t)) = 1 = 4 \times 0 + 1 = 4n(t) + 1$.
– Soient $t_1, \ldots, t_4 \in AB$ tels que $P(t_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, soient vraies. Soit $t = (a, t_1, \ldots, t_4)$. On a $n(b(t)) = 1 + n(b(t_1)) + \cdots + n(b(t_4)) = 1 + 1 + 4n(t_1) + \cdots + 1 + 4n(t_4) = 1 + 4n(t))$. Donc $\forall t \in AB$, $P(t)$ est vraie.

2. 1) $F = \neg p \vee \neg q \vee r$ (FNC et FND) $G = (p \wedge \neg q) \vee r$ (FND) et $G = (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ (FNC)

2) Oui, prendre $I(p) = 0$. Non prendre $I(p) = I(q) = 1$ et $I(r) = 0$.
Oui, prendre $I(r) = 1$. Non prendre $I(p) = I(q) = 1$ et $I(r) = 0$.

3) Non, prendre $I(p) = I(r) = 0$, alors $I^*(F) = 1 \neq I^*(G) = 0$.

3. Base : $n = 1$, évident.
Induction : supposons $(F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow (F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1 \supset G)$.
Par l'indication,
$(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow (\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots)))$;
par l'hypothèse d'induction pour $n - 1$
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow \neg F_n \vee ((F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G)$;
par l'indication :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow \neg F_n \vee (\neg(F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G)$;
par l'associativité de $\vee$:
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow (\neg F_n \vee \neg(F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1)) \vee G$;
par les lois de Morgan :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow \neg(F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \vee G$;
par l'indication :
$(\neg F_n \vee (F_{n-1} \supset (\cdots(F_1 \supset G)\cdots))) \Longleftrightarrow (F_n \wedge F_{n-1} \wedge \cdots \wedge F_1) \supset G$

4. Nous obtenons par exemple (après avoir renommé les variables liées) :
$\forall x \forall x' \exists y \Big(P(x) \supset \big(Q(y) \vee R(x')\big)\Big)$

5. 2)

$$x_{0,1} = (a(x_{1,1} + x_{2,1}) \quad ,$$
$$x_{1,1} = (a+b)x_{0,1} + bx_{2,1} + \varepsilon \quad ,$$
$$x_{2,1} = ax_{0,1} \quad ,$$

d'où $x_{0,1} = a(x_{1,1} + ax_{0,1}) = (a^2)^* ax_{1,1}$ et $x_{1,1} = ((a+b)^2(a^2)^* ax_{1,1} + ba(a^2)^* ax_{1,1}) + \varepsilon$ et $x_{0,1} = (a^2)^* a((a+b)^2(a^2)^* a + ba(a^2)^* a)^*$

3) le déterminimisé complété
$(0, a, \{1, 2\})$, $(0, b, \emptyset)$,
$(\{1, 2\}, a, \{0\})$, $(\{1, 2\}, b, \{0, 2\})$,
$(\{0, 2\}, a, \{0, 1, 2\})$, $(\{0, 2\}, b, \emptyset)$,
$(\{0, 1, 2\}, a, \{0, 1, 2\})$, $(\{0, 1, 2\}, b, \{0, 2\})$,
$(\emptyset, a, \emptyset)$, $(\emptyset, b, \emptyset)$.

4) Non, par exemple $\mathcal{B}$ reconnait le mot aba qui appartient à L. (Il faut que l'automate de départ soit déterministe et complet pour pouvoir échanger les états terminaux et non terminaux.)

6. 1pt par formule et un point par contrexemple)

(1) formules T-valides : F_1, F_2, F_4, formules non T-valides : F_7, F_8 : pour F_7 un monde avec un seul dodec sera un contrexemple, pour F_8 soit une monde avec une seule figure, soit un monde dont toutes les figures sont de même taille.

(3) formules insatisfaisables : F_5, il est impossible d'avoir à la fois $(BackOf(x, y)$ et $FrontOf(x, y)$ car les prédicats sont stricts dans Tarski (sauf dans un monde vide ce qui est exclus aussi par Tarski). (3) tautologies : F_3, F_6. F_3 car elle est de la forme $\forall x \forall y\ (p \vee \neg p)$, et F_6 car elle est de la forme $\forall x \forall y \forall z\ ((p \wedge \neg p) \supset q)$ et que une implication de prémisse faux est toujours vraie.