LICENCE Structures Discrètes

Examen 30 Juin 2006. Durée 2 heures.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs
tout téléphone visible sera confisqué.

SVP Mettez votre nom sur la copie, cachetez-la, puis écrivez votre numéro d'anonymat au–dessus, et reportez ce numéro d'anonymat sur toutes les copies intercalaires ; ensuite gardez le papier donnant votre numéro d'anonymat, vous en aurez besoin pour consulter votre copie – Merci

EXERCICE 1 *Questions de cours* :

1) Enoncer le théorème de déduction.
2) Donner une définition inductive du monoïde libre A^* sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.
3) Donner une définition inductive des arbres binaires sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 2 1) Donner une définition inductive de l'ensemble P des mots de longueur paire du monoïde libre A^* sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

2) Donner une définition inductive de l'application $f\colon P \longrightarrow A^*$ qui associe à $w = a_1a_2a_3 \cdots a_{2n-1}a_{2n}$ le mot $f(w) = \begin{cases} a_1a_3 \cdots a_{2n-1}, & \text{si } w \neq \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{si } w = \varepsilon. \end{cases}$

3) L'application f définie au 2) est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier les réponses (il n'est pas utile de faire une preuve par induction).

4) Définir une application injective $g\colon P \longrightarrow A^*$.

5) (Question à Bonus) Que peut-on déduire de 3) et 4) à propos de $|P|$ et $|A^*|$? $\diamondsuit$

EXERCICE 3 On se place dans $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 15, 40, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y". On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 15\}$ de E.

Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? $\diamondsuit$

EXERCICE 4 On rappelle que la duale d'une fonction f est la fonction $\tilde{f}$ définie par : $\tilde{f}(x, y) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})}$. Une fonction f est dite autoduale si $f = \tilde{f}$.

1) Soit f une fonction autoduale à 3 variables, et soient g_0 et g_1 les fonctions en les deux variables y et z définies par $g_0(y, z) = f(0, y, z)$ et $g_1(y, z) = f(1, y, z)$. Montrer que g_0 est la duale de g_1 et que g_1 est la duale de g_0.

2) Soit g une fonction à 2 variables. Montrer que la fonction f à 3 variables définie par $f(x, y, z) = xg(y, z) + \overline{x}\tilde{g}(y, z)$ est autoduale. En déduire un exemple de fonction autoduale à 3 variables.

3) (Question à Bonus) Quel est le nombre de fonctions autoduales à 3 variables ? $\diamondsuit$

EXERCICE 5 Soit $\mathcal{L}$ le langage $\mathcal{L} = \{a, s, p, q\}$ où p, q sont des symboles de relations d'arité 1, a est un symbole de constante, et s est un symbole de fonction unaire. On notera *ff* pour FAUX et *tt* pour VRAI.

1) Décrire l'ensemble des termes T sur $\{a, s\}$.
2) On considère les $\mathcal{L}$-structures I_0, I_1, I_2 de domaine T suivantes :

I_0: s est interprété par $s_{I_0}(t) = s(t)$; p est interprété par p_{I_0} et q est interprété par q_{I_0}, avec : $p_{I_0}(t) = q_{I_0}(t) = \mathit{ff}$ pour tout $t \in T$

T.S.V.P.

I_1: s est interprété par $s_{I_1}(t) = s(t)$; p est interprété par p_{I_1} et q est interprété par q_{I_1}, avec : $p_{I_1}(a) = p_{I_1}(s(a)) = tt$, $p_{I_1}(t) = ff$ pour $t \notin \{a, s(a)\}$ et $q_{I_1}(t) = ff$ pour tout $t \in T$.

I_2: s est interprété par $s_{I_2}(t) = s(t)$; p est interprété par p_{I_2} et q est interprété par q_{I_2}, avec : $p_{I_2}(s(a)) = p_{I_2}(s^n(a)) = tt$, pour tout $n \geq 1$, et $p_{I_2}(a) = ff = q_{I_2}(t)$ pour tout $t \in T$.

Soit F la formule $\forall x\big(p(x) \supset p(s(x))\big)\}$. I_0, I_1, I_2 sont-elles des modèles de F ?

Justifier les réponses.

3) Trouver un modèle I de F ayant pour domaine $\mathbb{N}$, où s soit interprété comme le successeur ($s_I(n) = n + 1$) et où ni p ni q ne soit interprété comme un prédicat trivial (c'est-à-dire soit toujours vrai soit toujours faux). ♢

EXERCICE 6 Trouver une formule prénexe équivalente à

$$\exists x P(x) \wedge \forall x\big(\exists y Q(y) \supset R(x)\big)$$

♢

EXERCICE 7 (Tarski) On considère un monde comprenant pour unique objet un tétraèdre moyen. Les formules suivantes sont-elles vraies dans ce monde :

F_1: $\forall x(Cube(x) \Longrightarrow Small(x))$

F_2: $\forall x(Cube(x) \wedge Small(x))$

F_3: $\forall x(Cube(x) \vee Small(x))$

F_4: $\exists x(Cube(x) \Longrightarrow Small(x))$

F_5: $\exists x(Tet(x) \Longrightarrow Small(x))$

Justifier les réponses. ♢

EXERCICE 8 Donner les FND et FNC de $F(x, y)$: $x\overline{y} + y\overline{x}$. ♢

EXERCICE 9 On considère l'automate $\mathcal{A}$ ayant pour alphabet $\{a, b\}$, pour états : 0,1,2 ; l'état initial est 0 ; il y a un unique état terminal (ou final) qui est 1. Les transitions sont : $(0, a, 1)$, $(0, b, 1)$, $(1, a, 0)$, $(1, b, 0)$, $(1, a, 2)$, $(2, b, 0)$.

1) Dessiner $\mathcal{A}$.

2) Donner les équations permettant de déterminer le langage L reconnu par $\mathcal{A}$ et donner une expression rationnelle de ce langage L.

3) Déterminiser $\mathcal{A}$.

4) (Question à Bonus) Soit $\mathcal{B}$ l'automate B, défini comme $\mathcal{A}$, mais dont les états terminaux sont 0 et 2 (on échange les états terminaux et non terminaux de $\mathcal{A}$). $\mathcal{B}$ reconnait-il le complémentaire de L (justifier votre réponse). ♢

1. Voir cours.

2.

1) (Base) $\varepsilon \in P$, (Induction) Si $w \in P$ et $a_1, a_2 \in A$, alors $a_1 a_2 w \in P$.

2) (Base) $f(\varepsilon) = \varepsilon$, (Induction) $f(a_1 a_2 w) = a_1 f(w)$.

3) L'application f est non injective ($f(aa) = f(ab) = a$), surjective (si $w = a_1 \cdots a_n$, $w = f(a_1 a a_2 a \cdots a_n a)$), et non bijective.

4) $g(w) = w$.

3.

Donner la borne supérieure : 60,
la borne inférieure : 3.
Donner les éléments maximaux : 6,15.
les éléments minimaux : 3.
A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? 3

4. 1) Posons $g(y,z) = f(1,y,z)$; $\tilde{g}(y,z) = \overline{g(\overline{y},\overline{z})} = \overline{f(1,\overline{y},\overline{z})} = \overline{f(\overline{0},\overline{y},\overline{z})} = \tilde{f}(0,y,z) = f(0,y,z)$, où la dernière égalité résulte de ce que f est autoduale.

2) Pour montrer que f est autoduale, il suffit de montrer que pour tous y et z, $f(0,y,z) = \overline{f(1,\bar{y},\bar{z})}$ et $f(1,y,z) = \overline{f(0,\bar{y},\bar{z})}$. Mais $f(0,y,z) = \tilde{g}(y,z) = \overline{g(\bar{y},\bar{z})}$ et $f(1,\bar{y},\bar{z}) = g(\bar{y},\bar{z})$. La seconde égalité se vérifie de même.

Exemple : $f(0,x,y) = x+y$, $f(1,x,y) = \overline{(\bar{x}+\bar{y})} = xy$; on peut écrire f sous la forme: $f(z,x,y) = \bar{z}f(0,x,y) + zf(1,x,y) = \bar{z}(x+y) + zxy = \bar{z}(x+y+xy) + zxy = \bar{z}(x+y) + \bar{z}xy + zxy = \bar{z}(x+y) + (\bar{z}+z)xy = \bar{z}(x+y) + xy$. On a bien $\overline{f(\bar{z},\bar{x},\bar{y})} = (\bar{z}+xy)(x+y) = \bar{z}(x+y) + xy$.

3) Toute fonction f peut s'écrire : $f(x_0,x_1,x_2) = \overline{x_0}f(0,x_1,x_2) + x_0 f(1,x_1,x_2)$. Par le 1), si f est autoduale, et si on pose $g(x_1,x_2) = f(0,x_1,x_2)$, $f(1,x_1,x_2) = \tilde{g}(x_1,x_2)$ est la duale de g. Toute fonction autoduale est donc de la forme $f(x_0,x_1,x_2) = \overline{x_0}g(x_1,x_2) + x_0\tilde{g}(x_1,x_2)$. Le 2) montre que les fonctions de cette forme sont toutes autoduales. Il y a donc autant de fonctions autoduales à 3 variables que de fonctions à 2 variables, soit 2^{2^2}.

5. 1) $T = \{a\,,\, s(a)\,,\, s^2(a)\,,\,\ldots\,,\, s^n(a)\,,\ldots\} = \{s^n(a) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$,

2) I_0 oui (*ff* $\supset$ ... est toujours vrai), I_1 non ($p_{I_1}(s(a)) = tt$ et $p_{I_1}(s^2(a)) = ff$ est un contrexemple), I_2 oui (dès que $p_{I_1}(s^k(a))$ est vrai, $p_{I_1}(s^{k+1}(a))$ est aussi vrai).

3) par exemple $a_I = 0$, $s_I(n) = n+1$, $p_I(n)$ vrai ssi $n \geq 10$ et $q_I(n)$ vrai ssi n pair.

6. Nous obtenons l'une des formes prénexes équivalentes:

$$\exists x \forall x' \forall y \Big(P(x) \wedge \big(Q(y) \supset R(x')\big)\Big)$$

$$\forall x \forall y \exists x' \Big(P(x') \wedge \big(Q(y) \supset R(x)\big)\Big)$$

$$\forall x \exists x' \forall y \Big(P(x') \wedge \big(Q(y) \supset R(x)\big)\Big)$$

7. F_1 vraie ; (car faux implique ... est vraie) F_2 fausse ; (l'unique objet n' est ni Cube ni petit) F_3 fausse ; (l'unique objet n' est ni Cube ni petit) F_4 vraie ; (car faux implique ... est vraie) F_5 fausse ; (l'unique tétraèdre n' est pas petit)

8. La formule est déjà en FND. pour la mettre en FNC on peut par exemple prendre sa duale $\tilde{F}(x,y)$: $(x+\overline{y})(y+\overline{x}) = xy + \overline{x}\,\overline{y}$, et à nouveau la duale de $\tilde{F}$ qui est égale à F en FNC $F = \tilde{\tilde{F}} = (x+y)(\overline{x}+\overline{y})$.

9. 2)

$$
\begin{aligned}
x_{0,1} &= (a+b)x_{1,1} \quad , \\
x_{1,1} &= (a+b)x_{0,1} + ax_{2,1} + \varepsilon \quad , \\
x_{2,1} &= bx_{0,1} \quad ,
\end{aligned}
$$

d'où $x_{0,1} = (a+b)^2x_{0,1} + (a+b)abx_{0,1} + (a+b)$ et $x_{0,1} = ((a+b)^2 + (a+b)ab)^*(a+b)$

1) et 3)

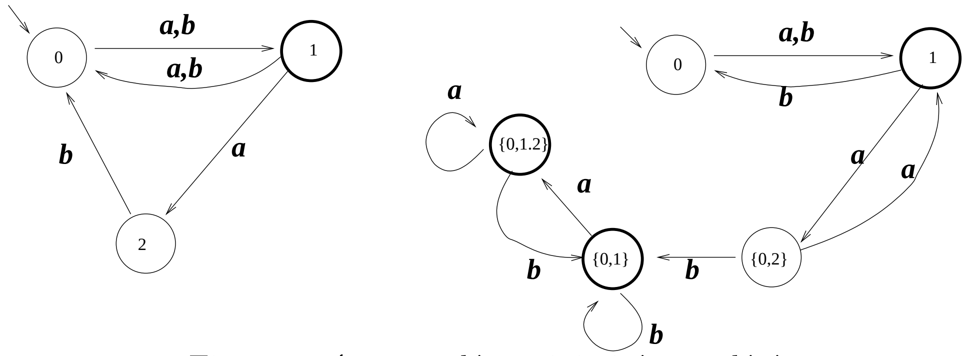

Figure 1 $\mathcal{A}$ et son déterminimisé complété

4) Non, par exemple $\mathcal{B}$ reconnait le mot aab qui appartient à L. (Il faut que l'automate de départ soit déterministe et complet pour pouvoir échanger les états terminaux et non terminaux.)