LICENCE Structures Discrètes – T.D. Logique

Exercice 1 On appelle *fonction caractéristique* d'une partie A de E la fonction $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ définie par:

$$\chi_A(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A, \\ 0 & \text{si } e \notin A. \end{cases}$$

1. Exprimer en termes de fonction caractéristique les opérations d'union, intersection, différence, différence symétrique, complémentation.
2. On suppose que E est fini de taille n.

(i) Définir l'algèbre de Boole F des fonctions de E dans $\{0,1\}$
(ii) Montrer qu'on a un isomorphisme ψ de $\mathcal{P}(E)$ dans F (qui associe à une partie A la fonction $\psi(A) = \chi_A$.
(iii) Définir l'algebre de Boole $\{0,1\}^n$.
(iv) Montrer qu'on a un isomorphisme φ de F dans $\{0,1\}^n$.
(iv) En déduire un isomorphisme entre les algèbres de Boole $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^n$. ♢

Exercice 2 1. Montrer que la relation $x \leq y$ ssi $x \sqcup y = y$ est une relation d'ordre sur une algèbre de Boole et que pour cet ordre, $\sup(x,y) = x \sqcup y$.
2. Montrer qu'un homomorphisme est une application monotone pour l'ordre sous-jacent à l'algèbre de Boole défini dans la question 1.
3. Montrer que toute application monotone n'est pas forcément un homomorphisme. ♢

Exercice 3 Trouver un polynôme booléen pour la fonction f définie par:

$f(x,y)$	x	0	1
	y		
	0	1	0
	1	0	0

Quelle est la table de vérité de la fonction duale ? Trouver un polynôme booléen pour la fonction duale. ♢

Exercice 4 Ecrire les fonctions duales de
1. $x\,\overline{y}\,\overline{z}$, 2. $xyz + t$, 3. $(p \vee \mathit{ff}) \wedge (q \vee \mathit{tt})$. ♢

Exercice 5 Soit une formule F écrite en utilisant les variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$: soit G la formule obtenue en remplaçant chaque occurrence de p_i par $\overline{p_i}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

1) Calculer G pour $F = p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$.
2) (i) Montrer que si F est une tautologie, G est aussi une tautologie. (ii) Montrer que si $F \equiv F'$, alors on a aussi $G \equiv G'$.
3) Dualité. Soient deux formules F, G formées avec uniquement des $\wedge, \vee, \neg$. Montrer que si $F \equiv G$ alors, on peut permuter les $\wedge$ et $\vee$ et on obtient encore deux formules équivalentes.
4) Appliquer la question 3 aux équivalences : $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. ♢

EXERCICE 6 Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes qu'on peut former avec n variables propositionnelles $p_1, \ldots, p_n$? $\diamondsuit$

EXERCICE 7 Ecrire la table de vérité et la fonction duale de $xy + \overline{x}\,\overline{y}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 8 Trouver un polynôme booléen pour la fonction f définie par:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Quelle est la table de vérité de la fonction duale ? Trouver un polynôme booléen pour la fonction duale. $\diamondsuit$

EXERCICE 9 Une fonction est *auto-duale* ssi $f(x) = \overline{f(\overline{x})}$. Les fonctions suivantes sont-elles auto-duales ?

1. $f(x, y) = x$
2. $f(x, y) = x + y$
3. $f(x, y) = xy + \overline{x}\,\overline{y}$
4. $f(x, y) = xy + \overline{x}y$ $\diamondsuit$

EXERCICE 10 Vérifiez que les fonctions f_1 et f_2 suivantes sont égales : $f_1(x, y, z) = xy + yz + xz$, $f_2(x, y, z) = (x + y)(y + z)(x + z)$. En déduire que f_1 et f_2 sont auto-duales. $\diamondsuit$

EXERCICE 11 On définit $x\ NAND\ y = \overline{xy}$. Montrer que toutes les opérations booléennes sont exprimables en fonction de $NAND$. $\diamondsuit$

EXERCICE 12 Dessiner les arbres correspondant aux formules suivantes :

$F = \neg(p \wedge \neg(q \vee s))$; $G = \neg(p \wedge (q \vee s))$; $H = \neg(p \vee (q \wedge \neg s)) \wedge s$.

Mettre en forme normale disjonctive et conjonctive les formules précédentes et dessiner les arbres correspondants à ces FND et FNC. $\diamondsuit$

EXERCICE 13 Les formules peuvent être écrites en notation infixe (cours) ou préfixe, et on omet parfois les parenthèses. Parmi les mots suivants, écrits en notation préfixe, reconnaître ceux qui sont des formules, les écrire en notation infixe et dessiner l'arbre syntaxique les représentant.

1. $\supset \neg p \vee qr$;
2. $\supset \neg pq \vee r$;
3. $\supset \neg \supset \vee \wedge pqrs \vee st$;
4. $\supset \vee \neg pqr$;
5. $\supset \neg ps \vee qr$. $\diamondsuit$

EXERCICE 14 Construire la table de vérité de XOR. $\diamondsuit$

EXERCICE 15 On suppose un univers partitionné en 4 types d'individus

- chat heureux
- chat malheureux
- souris heureuse
- souris malheureuse

On choisit une espèce (chat , souris) et une attitude (heureux, malheureux) ; on dit qu'un type est OK s'il a soit l'espèce choisie, soit l'attitude choisie, mais pas les deux. Sachant qu'un chat malheureux est OK, quel(s) autre(s) type(s) sont OK ? $\diamondsuit$

EXERCICE 16 (du livre de Lassaigne deRougemont) 1) Soit la formule F suivante : $pq\bar{r} + p\bar{q}r + \bar{p}qr$. F et $\neg F$ sont-elles satisfaisables ? Sont-elles des tautologies ?

2) Mettre F et $\neg F$ sous forme normale conjonctive (ou clausale) puis disjonctive.

3) Trouver une formule G telle $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.

4) Soit F_1 obtenue en substituant $\bar{p}$ à p dans F. F_1 est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F_1 ? $\diamondsuit$

EXERCICE 17 Soient p, q, r des propositions. Exprimer par des formules

1. Si p alors q. 2. Si p alors q sinon r. 3. p est une condition nécessaire pour que q soit vraie. 4. p est une condition suffisante pour que q soit vraie. 5. q si p. 6. q seulement si p.

Mettre les formules que vous avez trouvées en FND (forme normale disjonctive). $\diamondsuit$

EXERCICE 18 Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux ensembles de formules. On dit que $\mathcal{F} \models \mathcal{G}$ si et seulement si pour toute interprétation I, on a

$$I(F) = vrai \text{ pour toute } F \in \mathcal{F}$$

implique que

$$I(G) = vrai \text{ pour toute } G \in \mathcal{G} \,.$$

Montrer que $\left(\mathcal{F} \models \mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}' \models \mathcal{F}''\right)$ implique que $\mathcal{F} \models \mathcal{F}''$. $\diamondsuit$

EXERCICE 19 Soient $G = p \supset (q \supset r)$ et $F = (p \supset q) \supset r$. 1. A-t-on $\{F\} \models \{G\}$? 2. A-t-on $\{G\} \models \{F\}$? $\diamondsuit$

EXERCICE 20 Ecrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski*, des formules exprimant que :

1. **e** et **d** sont entre **b** et **a**.
2. Ni **e** ni **d** ne sont entre **b** et **a**.
3. Il est faux que **e** et **d** sont entre **b** et **a**. $\diamondsuit$

EXERCICE 21

1. Ecrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski*, `Small`, `Large`, `Cube`, *et uniquement ceux-ci*, des formules exprimant que :

1.a **a** est petit, ou **c** et **d** sont grands.

1.b **a** est petit et **c** est grand, ou **a** est petit et **d** est grand.

1.c Soit **a** et **e** sont des cubes, soit **a** et **f** sont des cubes.

2. Les formules trouvées en 1.a et 1.b sont-elles équivalentes ? J ustifiez votre réponse.

3. La formule $\texttt{Cube}(\mathbf{a}) \wedge \Big(\texttt{Cube}(\mathbf{e}) \ \vee \texttt{Cube}(\mathbf{f})\Big)$ est-elle équivalente à la formule trouvée en 1.c ? Justifiez votre réponse. ♢

Exercice 22 Les *formules du premier ordre* seront définies inductivement (en notation infixe) par:

– Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

– Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, et $(F \vee F')$ sont des formules.

– Si F est une formule et x est une variable, alors $(\forall x\ F)$ et $(\exists x\ F)$ sont des formules.

1. Dessiner l'arbre représentant la formule $\neg\Big(\Big((\forall x P(x)) \wedge Q(x)\Big) \supset \Big(R(x) \vee \neg P(x)\Big)\Big)$. Ecrire cette formule en notation préfixe (c'est-à-dire en mettant les opérateurs $\wedge, \supset$, etc. d'abord).

2. Donner une définition inductive de la fonction transformant la notation infixe en notation préfixe. Pouvez-vous modifier cette définition inductive pour obtenir une fonction transformant la notation infixe en un arbre représentant la formule ? ♢

Exercice 23 On considère un langage avec le prédicat unaire p et les prédicats binaires r et s.

1) Déterminer les variables libres et liées dans les formules 1 à 5 suivantes :

1. $(\forall x\, p(x)) \vee (\exists y\, p(y))$
2. $(\forall x\, p(x)) \wedge (\exists x\, p(x))$
3. $(\forall x\, p(x)) \wedge (\exists y\, r(x, y))$
4. $(\forall x \exists y\, s(x, y)) \supset (\exists y \forall x\, r(x, y))$
5. $(\forall x\, s(x, y)) \supset (\exists y\, r(x, y))$

2) Mettre sous forme prénexe les formules 1 à 5 précédentes ; combien de formes prénexes différentes peut-on trouver pour chacune des fomules (on dira que deux formes prénexes sont différentes si on ne peut pas passer de l'une à l'autre par un renommage des variables) ? ♢

Exercice 24 On considère un langage avec les prédicats binaires $=, \geq$ et $<$. Soient F et G les formules $\forall y(y \geq x) \wedge \forall x \exists y(x < y)$ et $(x + x = x)$.

1. Mettre sous forme prénexe la formule $F \wedge G$.
2. Montrer que $F \wedge G$ est satisfaisable. L'interprétation I telle que $I, v \models F \wedge G$ pour une valuation v est-elle un modèle de $F \wedge G$. ♢

Exercice 25 On considère un langage avec les prédicats unaires $prime, even, odd$ (premier, pair et impair) et les prédicats binaires $\geq$ et $|$ (divise).

1. Traduire en formules logiques : "certains nombres premiers sont pairs" et "tous les nombres premiers supérieurs à 5 sont impairs". Expliquer pourquoi les formules $\exists x(prime(x) \supset even(x))$, $(\exists x(prime(x))) \supset even(x)$ et $\forall x(prime(x) \wedge (x \geq 5) \wedge odd(x))$, $(\forall x(prime(x) \wedge (x \geq 5))) \wedge odd(x)$ ne sont pas des traductions correctes des énoncés précédents.

2. Mêmes questions pour "il existe un nombre pair divisible par 9" et "tout nombre pair est divisible par 2", et les formules $\exists x(even(x) \supset (9|x))$, $\forall x(even(x) \wedge (2|x))$. ♢

Exercice 26 On se donne un langage comprenant deux symboles de prédicats (ou relations) binaires R et $=$ ($=$ sera toujours interprété comme l'égalité).

1. Ecrivez une formule du calcul des prédicats exprimant que la relation binaire R est une relation d'ordre large.

2. Ecrivez une formule du calcul des prédicats exprimant que l'ordre R a un minimum.

3. Ecrivez une formule du calcul des prédicats exprimant que l'ordre R a un élément minimal. $\diamondsuit$

Exercice 27 On considère un langage avec les prédicats unaires $prime, even$, la constante 1, et la fonction unaire s (successeur). Traduire en formules logiques les énoncés :

1. tout nombre pair est premier
2. aucun nombre pair n'est premier
3. certains nombres premiers sont pairs
4. certains nombres premiers ne sont pas pairs
5. tout nombre premier est soit pair, soit égal à 2

Parmi les formules obtenues, lesquelles sont vraies dans $\mathbb{N}$. Justifier les réponses. $\diamondsuit$

Exercice 28 1. Précisez à l'aide d'un quantificateur le sens de "un" dans les phrases suivantes et formalisez-les en logique des prédicats :

a) Jean suit un cours
b) Un français a été champion du monde de cyclisme
c) Un entier naturel est pair ou impair
d) Un enseignant a toujours un nouveau sujet à étudier
e) Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur
f) Dans un triangle équilatéral une médiane est également hauteur
g) Un homme a besoin d'avoir un idéal

2. Formaliser les énoncés suivants dans le langage de la logique des prédicats du premier ordre :

a) Tous les hommes sont doués de raison
b) Seuls les hommes sont doués de raison
c) Aucun homme n'est doué de raison
d) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants
e) Chaque individu aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde
f) Tout homme a des amis et des ennemis
g) N'importe qui peut apprendre la logique, s'il travaille assez

3. Représenter la phrase "Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x" par une formule de la logique des prédicats en utilisant les prédicats suivants :

entier(x) : "x est un entier naturel"
successeur(x, y) : "x est successeur de y"
inf(x, y) : "x est inférieur ou égal à y"

Vous pouvez ajouter un prédicat egal(x, y) : "$x = y$" si vous le souhaitez.

Soit la formule : $\forall x(p(x) \supset \exists y(q(y,x) \wedge \forall z(r(z,x) \supset s(z,y))))$. Est-elle satisfaisable ? Est-elle universellement valide (tautologie) ? $\diamondsuit$

Exercice 29 Écrire, en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski, des formules traduisant

1. Un dodécaèdre est grand.

2. Tous les dodécaèdres sont grands.
3. Tous les dodécaèdres ne sont pas grands. Remarquer que cette assertion est ambiguë : on peut la traduire par une formule commençant par $\forall$ ou bien par une formule commençant par $\neg$. $\diamondsuit$

Exercice 30 Écrire, en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski, des formules traduisant
1. Il y a au moins deux cubes.
2. Il y a au plus deux cubes.
3. Il y a exactement deux cubes. $\diamondsuit$

Exercice 31 On se place dans le calcul des prédicats. Les formules sont définies inductivement par :
(B) Si R est un symbole de relation d'arité n, et si $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.
(I) Si F et F' sont des formules, alors $\neg F$, $(F \supset F')$, $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

1. Donnez une définition inductive de l'ensemble des variables libres dans une formule F.

On notera $V(t)$ l'ensemble des variables figurant dans le terme t. On notera $L(F)$ l'ensemble des variables libres dans la formule F.

2. Donnez une définition inductive de l'ensemble $B(F)$ des variables liées dans une formule F. $\diamondsuit$

Exercice 32 Soient les formules
(1) $\forall x(\neg R(x,x) \wedge (\forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))))$
(2) $\exists x \forall y R(x,y)$
(3) $\forall x \exists y R(x,y)$
(4) $\exists x \forall y R(y,x)$
(5) $\forall x \exists y R(y,x)$
(6) $\forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \supset (z = y \vee R(y,z))))$
(7) $\forall x \forall y(R(x,y) \supset \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$

Dites si oui ou non chacune des formules ci-dessus est valide dans les interprétations ci-dessous
(i) les entiers naturels (positifs) comme domaine et $<$ pour R.
(ii) les entiers relatifs comme domaine et $<$ pour R.
(iii) les rationnels comme domaine et $<$ pour R.
(iv) l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ comme domaine et $\subset$ (l'inclusion stricte) pour R.
(v) l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ comme domaine et $\subseteq$ (l'inclusion large) pour R.

Montrer que $\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall x \exists y R(y,x)$ et $\exists x \forall y R(y,x) \supset \forall x \exists y R(x,y)$. Les réciproques sont-elles vraies ? $\diamondsuit$

Exercice 33 Un monde de Tarski infini. On représente la grille du monde de Tarski par l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des coordonnées ligne et colonne. La case $(0,0)$ est en haut à gauche. Une figure est représentée par son nombre de face (4, 6 ou 12) et sa taille par l'entier 0, 1 ou 2.
1. donnez une définition d'un ensemble T permettant de représenter une figure dans le monde de Tarski.

2. proposez une interprétation des prédicats `Tet Cube Dodec Small Medium Large Smaller Larger LeftOf RightOf BackOf FrontOf Between`

3. écrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski, et uniquement ceux-ci*, les définitions des formules suivantes :

(i) $LessFig[x, y]$ pour *"x est une figure plus petite que y"* (fonction du nombre de faces).

(ii) $EqFig[x, y]$ pour *"x et y sont la même figure"*.

(iii) $EqSize[x, y]$ pour *"x est de la même taille que y"*.

(iv) $\Phi[x, y]$ qui donne l'ordre lexicographique (strict) sur l'ensemble T (on utilisera les définitions ci-dessus, et le nombre de faces est prioritaire par rapport à la taille, c'est-à-dire qu'un petit dodécaèdre est supérieur à un grand carré par exemple). ♢

Exercice 34 On considère les formules suivantes :

F_1: $\forall x \forall y (LeftOf(x, y) \supset RightOf(y, x))$
F_2: $\forall x \forall y ((Small(x) \wedge Small(y) \wedge BackOf(x, y)) \supset Dodec(x))$
F_3: $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \supset (Larger(x, y) \vee Smaller(x, y)))$
F_4: $\forall x \forall y \forall z ((Smaller(x, y) \wedge Smaller(y, z)) \supset Smaller(x, z))$
F_5: $\forall x \forall y (Larger(x, y) \supset x \neq y)$
F_6: $\forall x \forall y \forall z (Between(x, y, z) \vee \neg Between(x, y, z))$
F_7: $\forall x \forall y \forall z (Between(x, y, z) \vee \neg Between(x, z, y))$

1. Quelles sont les formules qui sont valides dans tous les mondes de Tarski's world ? Pour chaque formule qui n'est pas valide dans tous les mondes de Tarski's world dites comment construire un monde qui falsifie la formule.

2. Quelle formule est une tautologie ?

3. Pour chaque formule qui est valide dans tous les mondes de Tarski's world mais qui n'est pas une tautologie, dites comment changer l'interprétation des prédicats pour falsifier la formule. ♢

Exercice 35 Formaliser en logique des prédicats du premier ordre chacune des phrases du texte suivant emprunté à Lewis Caroll :

Aucune des choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il ne remarque pas n'est une sirène. Les choses qui sont rencontrées en mer et qu'on inscrit sur le livre de bord sont toujours dignes d'intérêt. Personnellement, je n'ai jamais rien rencontré, au cours de mes voyages en mer, qui soit digne d'intérêt. Les choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il remarque sont toujours inscrites sur le livre de bord.

Que peut-on dire des choses rencontrées en mer ? Formaliser votre réponse. ♢