LICENCE Structures Discrètes

Partiel 9 Novembre 2005. Durée 2heures.

Documents interdits - Mettez votre numero de groupe sur la copie Merci

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

EXERCICE 1 On considère $E = \{a, b, c, d\}$ et les quatre applications suivantes :
$f: E \longrightarrow E \quad f(a) = b\ ,\ f(b) = c\ ,\ f(c) = d\ ,\ f(d) = a$
$h: E \longrightarrow \{b, c, d\} \quad h(a) = b\ ,\ h(b) = b\ ,\ h(c) = d\ ,\ h(d) = c$
$g: \{b, c, d\} \longrightarrow E \quad g(b) = c\ ,\ g(c) = b\ ,\ g(d) = d$
$k: E \longrightarrow E \quad k(a) = b\ ,\ k(b) = b\ ,\ k(c) = d\ ,\ k(d) = c$
1) f, g, h, k sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifiez vos réponses.
2) Déterminer $h \circ g$. $h \circ g$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? $\diamondsuit$

EXERCICE 2 La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$ définie par "$n\ \mathcal{R}\ m$ si et seulement si $m = n + 1$" est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? $\diamondsuit$

EXERCICE 3 La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par "$n\ \mathcal{R}\ m$ si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1" est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? $\diamondsuit$

EXERCICE 4 On se place dans $E = \{1, 2, 5, 6, 7, 10, 14, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y".
1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.
2) E admet-il un maximum ? un minimum ?Justifiez vos réponses.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 5, 6\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. $\diamondsuit$

EXERCICE 5 En utilisant la convention $\forall r \in \mathbb{R}, r^0 = 1$, montrer par récurrence que:

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \text{ si } r \neq 1.$$

Poser $S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i$ et prouver par récurrence la propriété $P(n): S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Soit t un arbre binaire *strict* (c'est-à-dire que t est *non vide*, chaque nœud de t a exactement 0 ou 2 fils et donc il n'y a aucun nœud avec un seul fils non vide). Soient $n(t)$ le nombre de nœuds de t, $f(t)$ le nombre de feuilles de t et $ar(t)$ le nombre d'arêtes de t.
1) Donner au moins trois exemples d'arbres binaires *stricts* sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.
2) Donner une définition inductive de l'ensemble ABS des arbres stricts.
3) On peut définir n par : $n(\ (a, \emptyset, \emptyset)\ ) = 1$, et si $t = (a, g, d)$ est un arbre binaire strict, alors $n(t) = n(g) + n(d) + 1$. Donner une définition inductive de ar et f.
4) Montrer par induction que si t est un arbre binaire strict $n(t) = ar(t) + 1$.
5) Montrer par induction que si t est un arbre binaire strict $n(t) = 2f(t) - 1$. $\diamondsuit$

EXERCICE 7 La duale d'une fonction booléenne f est définie par $\widetilde{f}(x) = \overline{f(\overline{x})}$. f est dite *auto-duale* ssi $f = \widetilde{f}$. Donner les fonctions duales des fonctions f_1 à f_4 suivantes. Lesquelles parmi f_1, f_2, f_3, f_4 sont-elles auto-duales ?
1. $f_1(x, y) = x$
2. $f_2(x, y) = x + y$
3. $f_3(x, y) = xy + \overline{x}\ \overline{y}$
4. $f_4(x, y) = xy + \overline{x}y$

$\diamondsuit$

1. 1 f est injective, surjective et bijective, g est injective, non surjective, h est surjective non injective et k n'est ni injective, ni surjective.

2. $h \circ g(b) = d$, $h \circ g(c) = b$, $h \circ g(d) = c$. $h \circ g$ est bijective (bien que ni h ni g ne soit bijective).

2. Si $\mathcal{R}$ était symétrique, on aurait $m = n + 1 \Longleftrightarrow n = m + 1$, ce qui est impossible. Si elle était réflexive on aurait $n = n + 1$. Si elle était transitive, on aurait

$$m = n + 1 \text{ et } p = m + 1 \Longrightarrow p = n + 1\,.$$

Contrexemples : symétrie: on a $0\mathcal{R}1$ et pas $1\mathcal{R}0$, réflexivité: on n'a pas $0\mathcal{R}0$, transitivité: on a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}2$ et pas $0\mathcal{R}2$

3. Cette relation n'est pas transitive. Par exemple, 2 et 6 ont un diviseur commun (2), 6 et 3 ont un diviseur commun (3), mais le diviseur commun à 2 et 3 est 1. Elle est symétrique et non réflexive car pour $n = 1 = m$, on n'a pas $1\ \mathcal{R}\ 1$. Elle est réflexive sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

4. 1)

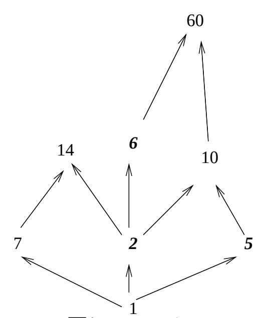

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? oui 1 divise tous les éléments de E. un maximum ? Non car 7,14 ne divisent pas 60.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 5, 6\}$ de E. Donner les majorants : 60.

les minorants de A : $\{1\}$.

Donner la borne supérieure : 60,

la borne inférieure : 1.

Donner les éléments maximaux : 5,6.

les éléments minimaux : 2,5.

A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

5. Soit $r \neq 1$. On considère la propriété $P(n)$: " $S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ ". Vérifions

$$P(0)\colon S_0 = r^0 = 1 = \frac{r-1}{r-1}\,.$$

Soit $n \geq 0$, supposons que $P(n)$ est vraie et vérifions

$$P(n+1)\colon S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} + r^{n+1} = \frac{r^{n+2} - 1}{r - 1}\,.$$

On en déduit donc que $\forall n \geq 0,\ S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$.

6. 1) $(a,\emptyset,\emptyset),(b,\emptyset,\emptyset),(a,(b,\emptyset,\emptyset),(b,\emptyset,\emptyset))$

2) La définition inductive de l'ensemble ABS est

(B) $\forall a\in A,(a,\emptyset,\emptyset)\in ABS$.

(I) $g,d\in ABS \implies \forall a\in A,\ (a,g,d)\in ABS$

3)

(B) $\forall b\in A, ar(\ (a,\emptyset,\emptyset)\ )=0$, et

(I) si $t=(a,g,d)$ est un arbre binaire strict, alors $ar(t)=ar(g)+ar(d)+2$.

(B) $\forall b\in A, f(\ (a,\emptyset,\emptyset)\ )=1$, et

(I) si $t=(a,g,d)$ est un arbre binaire strict, alors $f(t)=f(g)+f(d)$.

4) Soit $P(x)$ la propriété "n(x) = ar(x) +1".

– $\forall a\in A$, si $x=(a,\emptyset,\emptyset)$ alors $n(x)=1=0+1=ar(x)+1$.

– Si les deux sous arbres de x ne sont pas vides, soit g et d ses deux sous arbres, $x=(a,g,d)$; on a $n(x)=n(g)+n(d)+1=ar(g)+1+ar(d)+1+1=ar(x)+1$ (faire le dessin).

5) Soit $P(x)$ la propriété "$n(x)=2f(x)-1$".

– $\forall a\in A$, si $x=(a,\emptyset,\emptyset)$ alors $n(x)=1=2\times 1-1=2f(x)-1$.

– Soient $g,d\in ABS$ tels que $P(g)$ et $P(d)$ soient vraies. Soit $a\in A$ et $x=(a,g,d)$. On a $n(x)=1+n(g)+n(d)=1+2f(g)-1+2f(d)-1=2(f(g)+f(d))-1=2f(x)-1$. Donc $\forall x\in ABS$, $P(x)$ est vraie.

7. f_1 et f_4 sont auto-duales (en remarquant que $f_4(x,y)=xy+\overline{x}y=y$). $\widetilde{f_2}(x,y)=xy$ et $\widetilde{f_3}(x,y)=\overline{x}y+x\overline{y}$. $\widetilde{f_2}(x,y)=xy$ et $\widetilde{f_3}(x,y)=x\overline{y}+y\overline{x}$. Il est clair que $f_2\neq\widetilde{f_2}$, pour f_3 remarquer que $f_3(0,0)=1\neq 0=\widetilde{f_3}(0,0)$.