LICENCE Structures Discrètes

Partiel Mercredi 26 Mars 2008. Durée 2heures.

Documents interdits - Mettez votre numero de groupe sur la copie Merci

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs

tout téléphone visible sera confisqué

Exercice 1 Soit E un ensemble fini et $f\colon E \longrightarrow E$ une application injective.

1) Que pouvez-vous dire de f ?

2) Donnez une application injective et non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

2) Donnez une application surjective et non injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. $\diamondsuit$

Exercice 2 La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par "$n \mathcal{R} m$ si et seulement si : n divise m ou $n > m$" est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? $\diamondsuit$

Exercice 3 On se place dans $E = \{2, 5, 6, 7, 10, 14, 30\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.

2) E admet-il un maximum ? un minimum ?Justifiez vos réponses.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 5, 6\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. $\diamondsuit$

Exercice 4 En utilisant la convention $\forall r \in \mathbb{R}, r^0 = 1$, montrer par récurrence que:

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad (r \neq 1).$$

Poser $S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i$ et prouver par récurrence la propriété $P(n)\colon S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$. $\diamondsuit$

Exercice 5 La duale d'une fonction booléenne f est définie par $\widetilde{f}(x) = \overline{f(\overline{x})}$. f est dite auto-duale si et seulement si $f = \widetilde{f}$. Donnez les fonctions duales des fonctions f_1 à f_3 suivantes. Lesquelles parmi f_1, f_2, f_3 sont-elles auto-duales ? Justifiez vos réponses.

1. $f_1(x, y) = x$
2. $f_2(x, y) = x + y$
3. $f_3(x, y) = xy + \overline{x}y$ (simplifier avant de calculer). $\diamondsuit$

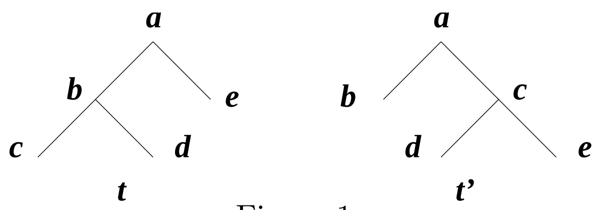

Figure 1

Exercice 6 L'ensemble AB des arbres binaires étiquetés sur l'alphabet A est défini inductivement par

(B) $\emptyset \in AB$ (il s'agit de l'arbre vide),

(I) $g, d \in AB \Longrightarrow \forall a \in A$, $(a, g, d) \in AB$ (l'arbre de racine a, de fils gauche g et de fils droit d).

La hauteur d'un arbre binaire est définie inductivement par (B) Si $t = \emptyset$, $h(t) = 0$, et induction (I) : $h((a, g, d)) = max(h(g), h(d)) + 1$,

1. Dessinez tous les arbres binaires de hauteur 2 sur l'alphabet $A = \{a\}$.

2. Rappelons que le parcours préfixe d'un arbre binaire consiste à lire les étiquettes de ses nœuds de la racine vers les feuilles et de gauche à droite. On considère les arbres binaires sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

T.S.V.P.

2.1 Donnez le parcours préfixe $pref(t)$ et $pref(t')$ des arbres t et t' dessinés ci-dessous.
2.2 Donnez une définition inductive de l'application $pref$ qui associe à un arbre t son parcours préfixe $pref(t)$.
2.3 Donnez le domaine et l'image de l'application $pref$.
2.4 Montrez par induction structurelle que l'application $pref\colon AB \longrightarrow A^*$ est surjective. Est-elle injective ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

3. Les arbres "Peigne-gauche" Pg sont définis inductivement par

(B) $\forall a \in A$, $\forall g, d \in AB$ tels que $h(g) = h(d) = 1$, $(a, g, d) \in Pg$,
(I) $\forall g, \in Pg$, $\forall d \in AB$ tel que $h(d) = 1$, $\forall a \in A$, $(a, g, d) \in Pg$.

L'alphabet est $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

3.1 Dessinez deux arbres Peigne-gauche de hauteurs différentes.
3.2 Donnez une définition inductive du nombre de nœuds $n(t)$ et du nombre de feuilles $f(t)$ d'un arbre Peigne-gauche.
3.3 Montrez par induction structurelle que si t est un arbre Peigne-gauche, alors $n(t) = 2f(t) - 1$.

4. L'application $pref\colon Pg \longrightarrow A^*$ est-elle surjective ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

5. (question à bonus) L'application $pref\colon Pg \longrightarrow A^*$ est-elle injective ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple. ♢

1. 1 f est surjective et bijective.
2. $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $h(n) = 2n$.
3. $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

2. Réflexive : oui car tout n se divise lui-même. Cette relation n'est pas symétrique. Par exemple, $3 \mathcal{R} 2$ car $2 < 3$ mais on n'a pas $2 \mathcal{R} 3$. Elle n'est pas transitive car $2 \mathcal{R} 6$ et $6 \mathcal{R} 3$, mais on n'a pas $2 \mathcal{R} 3$.

3. 1)

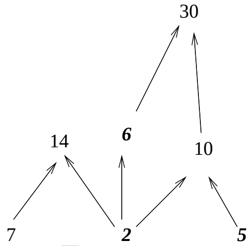

Figure 2

2) E admet-il un minimum ? non car 2 et 5 premiers entre eux. un maximum ? Non car 7,14 ne divisent pas 30.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{2, 5, 6\}$ de E. Donner les majorants : $\{30\}$.
les minorants de A : $\emptyset$.
Donner la borne supérieure : 30,
la borne inférieure : n'existe pas.
Donner les éléments maximaux : 5,6.
les éléments minimaux : 2,5.
A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

4. Soit $r \neq 1$. On considère la propriété $P(n)$: " $S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ ". Vérifions

$$P(0)\colon S_0 = r^0 = 1 = \frac{r-1}{r-1}.$$

Soit $n \geq 0$, supposons que $P(n)$ est vraie et vérifions

$$P(n+1)\colon S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} + r^{n+1} = \frac{r^{n+2} - 1}{r - 1}.$$

On en déduit donc que $\forall n \geq 0$, $S_n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$.

5. f_1 et f_3 sont auto-duales (en remarquant que $f_4(x, y) = xy + \overline{x}y = y$). $\widetilde{f_2}(x, y) = xy$. $\widetilde{f_2}(x, y) = xy$ et il est clair que $f_2 \neq \widetilde{f_2}$ (prendre par exemple $x = 1$ et $y = 0$).

6. 1) il y en a 3 : $(a, (a, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, $(a, \emptyset, (a, \emptyset, \emptyset))$, $(a, (a, \emptyset, \emptyset), (a, \emptyset, \emptyset))$.
2)
2.1 $pref(t) = pref(t') = abcde$.

2.2 Donnez une définition inductive du parcours préfixe $pref$ d'un arbre :

(B) $pref(\emptyset) = \varepsilon$ (il s'agit du mot vide),

(I) $pref(\ (a, g, d)\ ) = a\ pref(g)\ pref(d)$

2.3 Donnez le domaine et l'image de l'application $pref$: domaine AB, image A^*

2.4 Que peut-on dire de l'application $pref$: elle est surjective et non injective. Soit $pref\colon AB \longrightarrow A^*$. Montrons par induction structurelle que $pref$ est surjective.

(B) $\varepsilon = pref(\emptyset)$

(I) supposons que $w = pref(g)$ et soit $w' = aw$, alors $w' = pref((a, g, \emptyset))$.

non injective: contrex. immediat.

3.

3.2

(B) $\forall a \in A\ \forall g, d \in AB$ tels que $h(g) = h(d) = 1$, $n((a, g, d)) = 3$ et $f((a, g, d)) = 2$

(I) $\forall g \in Pg$, $\forall d \in AB$ tel que $h(d) = 1$, $\forall a \in A$, on a : $n((a, g, d)) = 2 + n(g)$ et $f((a, g, d)) = f(g) + 1$ (car d de hauteur 1)

3.3 Montrez par induction que si t est un arbre Peigne-gauche, alors $n(t) = 2f(t)-1$. Soit $P(x)$ la propriété "$n(x) = 2f(x) - 1$".

(B) $n(x) = 3 = 2 \times 2 - 1 = 2f(x) - 1$.

(I) Soit $(a, g, d) \in Pg$, supposons par induction que $P(g)$ et $P(d)$ soient vraies. Soit $a \in A$ et $x = (a, g, d)$. On a $n(x) = 2+n(g) = 2+2f(g)-1 = 2(f(g)+1)-1 = 2f(x)-1$.

Donc $\forall x \in Pg$, $P(x)$ est vraie.

4. $pref$ n'est pas surjective sur Pg puisque les parcours préfixes des arbres de Pg sont des mots de longueur ≥ 3.

Elle est injective : par induction sur la longueur de $w \in A^3A^*$.

Lemme : soit $w \in A^*$, $|w| \geq 3$, alors $w = pref(t) \iff w = aw''b \wedge t = (a, g, (b, \emptyset, \emptyset)) \wedge w'' = pref(g)$

(B) soit $xyz \in A^3$, si $xyz = pref(t)$ et $t \in Pg$, on a $t = (x, (y, \emptyset, \emptyset), (z, \emptyset, \emptyset))$

(I) supposons que, pour $w \in A^*$ de longueur au plus $2n-1$, $n > 1$, on a : $w = pref(t) = pref(t') \implies t = t'$ et soit $w' = awb$ de longueur $2n+1$ (puisque les arbres de Pg ont un nombre impair de nœuds) ; par le lemme on a alors $w' = pref(t) = pref(t') \implies t = (a, g, t_2) \wedge t' = (a, g', t'_2) \wedge t_2 = t'_2 = (b, \emptyset, \emptyset) \wedge w'' = pref(g) = pref(g')$, d'où par l'induction $g = g'$ et donc $t = t'$.