LICENCE Structures Discrètes

Partiel 9 Novembre 2005. Durée 2heures.

Documents interdits

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

EXERCICE 1 On considère $E = \{a, b, c, d\}$ et les quatre applications suivantes :
$f : E \longrightarrow E \quad f(a) = b\ ,\ f(b) = c\ ,\ f(c) = d\ ,\ f(d) = a$
$h : E \longrightarrow \{b, c, d\} \quad h(a) = b\ ,\ h(b) = b\ ,\ h(c) = d\ ,\ h(d) = c$
$g : \{b, c, d\} \longrightarrow E \quad g(b) = c\ ,\ g(c) = b\ ,\ g(d) = d$
$k : E \longrightarrow E \quad k(a) = b\ ,\ k(b) = b\ ,\ k(c) = d\ ,\ k(d) = c$ 1) f, g, h, k sont-elles injectives ? bijectives ? surjectives ? Justifiez vos réponses.
2) $h \circ g$ est-elle injective ? bijective ? surjective ? ♢

EXERCICE 2 Montrer que f et g surjectives implique que $f \circ g$ est surjective. ♢

EXERCICE 3 Est-ce que f et $f \circ g$ surjectives implique que g surjective ? Vous justifierez votre réponse en donnant une preuve si c'est vrai et un contre-exemple si c'est faux. ♢

EXERCICE 4 On se place dans $E = \{1, 3, 5, 6, 7, 15, 21, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y".
1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.
2) E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 15, 21, 60\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? ♢

EXERCICE 5 Un arbre n-aire *complet* est un arbre où :

- chaque nœud interne a exactement n fils,
- toutes les feuilles sont à la même profondeur.

L'arbre vide est un arbre n-aire de profondeur 0. L'arbre $(a, \underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{n})$ a la profondeur 1 et sera noté a.

1) Donner une définition inductive des arbres n-aires complets et étiquetés sur l'alphabet $A = \{a\}$ (tous les nœuds sont des a). Indication : On pourra remarquer que tous les sous-arbres fils d'un même nœud sont identiques dans un arbre n-aire complet.
2) Donner une définition inductive du nombre de nœuds et du nombre d'arêtes d'un arbre n-aire complet de profondeur k.
3) Calculer le nombre de nœuds et le nombre d'arêtes d'un arbre n-aire complet de profondeur k. ♢

EXERCICE 6 Ecrire la table de vérité de $xy + \overline{x}$. Ecrire la fonction duale de $xy + \overline{x}$ avec sa table de vérité. ♢

EXERCICE 7 On considère $A = \{a, b\}$, ordonné par $a < b$. A^* muni de l'ordre lexicographique est-il bien ordonné ? ♢

1. 1 f est injective, surjective et bijective, g est injective, non surjective, h est surjective non injective et k n'est ni injective, ni surjective. 2. $h \circ g$ est bijective (bien que ni h ni g ne soit bijective).

2. $\forall z \exists y \; z = f(y)$ et $\forall y \exists x \; y = g(x)$ d'où $z = f \circ g(x)$ et $\forall z \exists x \; z = f \circ g(x)$.

3. Non, contre-exemple : $f \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(z)$ est la valeur absolue de z, et g l'inclusion de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Ou bien $f \colon \{a, b, c\} \longrightarrow \{d, e\}$, et $g \colon \{a, b, c\} \longrightarrow \{a, b, c\}$, avec $g(a) = g(b) = a$ $g(c) = c$ et $f(a) = d$ $f(c) = f(b) = e$.

4. 1)

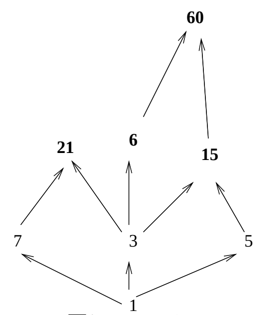

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? oui 1 divise tous les éléments de E. un maximum ? Non car 7,21 ne divisent pas 60.

3) On considère le sous-ensemble $A = \{6, 15, 21, 60\}$ de E. Donner les majorants : il n'y en a pas (21 ne divise personne).

les minorants de A : $\{3, 1\}$.

Donner la borne supérieure : il n'y en a pas,

la borne inférieure : 3.

Donner les éléments maximaux : 21,60.

les éléments minimaux : 21 , 6 , 15.

A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

5. 1) Base : $\emptyset \in AC$ et Induction : si $t \in AC$ alors $(a, \underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \in A$.

2) $n_k = n n_{k-1} + 1, n_0 = 0$ soit $1 + n + n^2 + \cdots + n^{k-1}$, et $a_k = n a_{k-1} + n, a_0 = 0$ soit $n + n^2 + \cdots + n^{k-1}$.

6.

x	y	$xy + \overline{x}$	$\tilde{f} = (x+y)\overline{x} = y\overline{x}$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

7. Non, on a une suite infinie décroissante : $ab > aab > aaab > \cdots$.