LICENCE Structures Discrètes

Examen Blanc 24 Mai 2006. Durée 1 heure 45.

Ne Compte pas pour le Contrôle Continu.

Documents interdits

EXERCICE 1 Donner 4 applications, f, g, h, b de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que f soit injective et non surjective, g soit surjective et non injective, h ne soit ni injective ni surjective, et b soit bijective. ♢

EXERCICE 2 1. L'ordre lexicographique sur $\{a\}^*$ est-il bien fondé ?
2. Soit $A = \{a, b, c\}$ avec $a < b < c$. L'ordre lexicographique sur A^* est-il bien fondé ?
Justifiez vos réponses. ♢

EXERCICE 3 On se place dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 15, 40, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.
2) E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.
3) On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 8, 15\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? ♢

EXERCICE 4 Un arbre n-aire *complet* est un arbre où :

- chaque nœud interne a exactement n fils,
- toutes les feuilles sont à la même profondeur.

L'arbre vide est un arbre n-aire de profondeur 0. L'arbre $(a, \underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{n})$ a la profondeur 1 et sera noté a.

1) Donner une définition inductive des arbres n-aires complets et étiquetés sur l'alphabet $A = \{a\}$ (tous les nœuds sont des a). Indication : On pourra remarquer que tous les sous-arbres fils d'un même nœud sont identiques dans un arbre n-aire complet.
2) Donner une définition inductive du nombre de nœuds et du nombre d'arêtes d'un arbre n-aire complet de profondeur k.
3) Calculer le nombre de nœuds et le nombre d'arêtes d'un arbre n-aire complet de profondeur k. ♢

EXERCICE 5 Ecrire la table de vérité de $x\overline{y} + \overline{x}$. Ecrire la fonction duale de $x\overline{y} + \overline{x}$ avec sa table de vérité. ♢

EXERCICE 6 Enoncer et démontrer le théorème de déduction. ♢

EXERCICE 7 Trouver une formule prénexe équivalente à

$$\big(\exists x\, P(x)\big) \wedge \big(\forall x\, R(x)\big)$$ ♢

EXERCICE 8 Trouver un modèle de la formule $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$ où :

$F_1 = \forall x R(x, x)$
$F_2 = \forall x \forall y\ ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \supset x = y)$
$F_3 = \forall x \forall y \forall z\ ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \supset R(y, z))$
$F_4 = \exists x \forall y\ R(x, y)$ ♢

1. 1 $f\colon n \mapsto n^2$, $g(2k)=k$ et $g(2k+1)=0$, $h(2k)=1$ et $h(2k+1)=0$, et $b(2k)=2k+1$ et $b(2k+1)=2k$.

2. 1. Oui, car $\{a\}^*$ avec l'ordre lexicographique est isomorphe à $\mathbb{N}$.
2. Non, contre-exemple : $b > ab > aab > \cdots$.

3. 1)

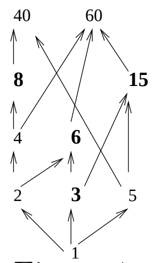

Figure 1

2) E admet-il un minimum ? oui 1 divise tous les éléments de E. un maximum ? Non car 40 ne divisent pas 60.
3) On considère le sous-ensemble $A=\{3,6,8,15\}$ de E. Donner les majorants : il n'y en a pas (8 ne divise pas 60 et 6 ne divise pas 40).
les minorants de A : $\{1\}$.
Donner la borne supérieure : il n'y en a pas,
la borne inférieure : 1.
Donner les éléments maximaux : 8,6,15.
les éléments minimaux : 8,3.
A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

4. 1) Base : $\emptyset \in AC$ et Induction : si $t \in AC$ alors $(a, \underbrace{t,\ldots,t}_{n}) \in A$.

2) $n_k = nn_{k-1}+1, n_0=0$ soit $1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}$, et $a_k = na_{k-1}+n, a_0=0$ soit $n+n^2+\cdots+n^{k-1}$.

5.

x	y	$x\overline{y}+\overline{x}$	$\tilde{f}=(x+\overline{y})\overline{x}=\overline{y}\,\overline{x}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

6. Voir Cours.

7. Nous obtenons l'une des formes prénexes équivalentes: $\exists x \forall x' \Big(P(x) \wedge R(x')\Big)$ ou $\forall x' \exists x \Big(P(x) \wedge R(x')\Big)$

8. $\mathbb{N}$ avec $R(m,n)$ ssi $m \leq n$.