LICENCE Structures Discrètes

Partiel 31 Octobre 2007. Durée 2 heures.

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

Exercice 1

L'application $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} n^2 & n \leq 0 \\ n^2+1 & n > 0 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifiez vos réponses. $\diamondsuit$

Exercice 2

Démontrez qu'un ordre $\leq$ sur E est bien fondé si et seulement si toute partie non vide X de E admet un élément minimal. $\diamondsuit$

Exercice 3

1. Soit A l'alphabet $\{a\}$ (formé de la seule lettre a). L'ordre lexicographique sur A^* est-il bien fondé ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contrexemple.

2. Soit A l'alphabet $\{a,b,c\}$ (formé des lettres a,b,c avec l'ordre $a < b < c$). L'ordre lexicographique sur A^* est-il bien fondé ? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contrexemple. $\diamondsuit$

Exercice 4 Soit $A = \{(,)\}$ l'alphabet constitué de deux parenthèses (ouvrante et fermante). L'ensemble $D \subseteq A^*$ des parenthésages bien formés, appelé langage de Dyck, est défini par

(B) $\varepsilon \in D$,

(I) si x et y sont dans D, alors (x) et xy sont aussi dans D.

1. Pour x dans D, on note $g(x)$ (resp. $d(x)$) le nombre de parenthèses ouvrantes (resp. fermantes) dans x. Donner la définition inductive des fonctions g et d.

2. Montrer par induction que tout mot du langage de Dyck a autant de parenthèses ouvrantes que fermantes. $\diamondsuit$

Exercice 5 On se place dans $E = \{2,3,5,6,15,30\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.

2) E admet-il un maximum ? un minimum ? Justifiez vos réponses.

3) Donner les éléments maximaux, minimaux de E.

4) On considère le sous-ensemble $A = \{3,6,9,15\}$ de E. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. $\diamondsuit$

Exercice 6 Soit $f\colon \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}$ une fonction booléenne d'arité 2.
Montrer que $f(x,y) = \bar{x}f(0,y) + xf(1,y)$. $\diamondsuit$

Exercice 7

1. Ecrire, *en utilisant les symboles de prédicats du monde de Tarski,* `Small`, `Large`, `Cube`, *et uniquement ceux-ci*, des formules exprimant que :

1.a **a** est petit, ou **c** et **d** sont grands.

1.b **a** est petit et **c** est grand, ou **a** est petit et **d** est grand.

1.c Soit **a** et **e** sont des cubes, soit **a** et **f** sont des cubes.

2. Les formules trouvées en 1.a et 1.b sont-elles équivalentes ? Justifiez votre réponse.

3. La formule $\texttt{Cube}(\mathbf{a}) \wedge \Big(\texttt{Cube}(\mathbf{e}) \vee \texttt{Cube}(\mathbf{f})\Big)$ est-elle équivalente à la formule trouvée en 1.c ? Justifiez votre réponse. $\diamondsuit$

Exercice 8

1) Donner une définition inductive de l'ensemble AB des arbres binaires.

2) Soient $n(t)$ le nombre de nœuds de t et $ar(t)$ le nombre d'arêtes de t. Donner une définition inductive de n et ar. $\diamondsuit$

1. Injective car si n, p sont > 0, $n^2 + 1 = p^2 + 1$ implique $n = p$, si n, p sont dans ≤ 0, $n^2 = p^2$ implique $n = p$, et si $n > 0$ et $p \leq 0$, on ne peut pas avoir $n^2 + 1 = p^2$. Non surjective car par exemple 6 n'est ni n^2 ni $p^2 + 1$. Donc non bijective.

2. voir cours.

3. 1. oui car A^* est isomorphe à $\mathbb{N}$ avec l 'ordre habituel.
2. Non car $(a^n b)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante.

4. 1. Définissons par exemple d
(B) $d(\varepsilon) = 0$,
(I) si x et y sont dans D, alors $d(\ (x)\ ) = 1 + d(x)$ et $d(xy) = d(x) + d(y)$.
2. Soit $P(x)$ la propriété "$d(x) = g(x)$" que nous allons montrer par induction.
(B) L'unique élément de la base est ε qui satisfait P puisque

$$d(\varepsilon) = g(\varepsilon) = 0.$$

(I) Soient $x, y \in D$ tels que $d(x) = g(x)$ et $d(y) = g(y)$ et soit par exemple $z = xy$. On a $d(z) = d(x) + d(y) = g(x) + g(y) = g(z)$, d'où $P(z)$ est vérifiée. Le cas où $z = (x)$ se vérifie de même car $d(z) = d(x) + 1 = g(x) + 1 = g(z)$.

On en déduit que $\forall x \in D$, $g(x) = d(x)$.

5.
2) E admet-il un minimum ? non 3 et 5 premiers entre eux. un maximum ? 30 3) Éléments maximaux, minimaux de E ; maximaux : 30 et minimaux :2 5 et 3.

4) On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 15\}$ de E. A admet-il un maximum ? NON un minimum ? OUI 3 Donner la borne supérieure, 30 la borne inférieure de A: 3 Donner les éléments maximauxde A , 6,15, minimaux 3 de A.

6. On vérifie l'égalite pour les 2 valeurs possibles de x qui sont 0 et 1.

7. 1. Fait en TME 2 : non si **a** est petit ainsi que **c** et **d**, alors 1.a est vraie et 1.b faux ; et 3: oui distributivite de $\wedge$ sur $\vee$.

8. Voir cours ou TD.