LICENCE LI214 Structures Discrètes

Partiel 12 Novembre 2008. Durée 2 heures.

Documents interdits

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

Exercice 1 Donner 4 applications, f, g, h, b de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que f soit non injective et non surjective, g soit surjective et non injective, h soit injective et non surjective, et b soit bijective.
Justifier les réponses. ♢

Exercice 2 Donner une définition inductive du parcours préfixe d'un arbre binaire. ♢

Exercice 3 Un arbre n-aire *complet* est un arbre où :

- chaque nœud interne a exactement n fils,
- toutes les feuilles sont à la même profondeur.

L'arbre vide est un arbre n-aire de profondeur 0.

1. Donner une définition inductive de l'ensemble AC des arbres n-aires complets et étiquetés sur l'alphabet $A = \{a\}$ (tous les nœuds sont étiquetés a).
2. Donner une définition inductive des arbres n-aires complets et étiquetés sur un alphabet A non réduit à un unique élément. Indication : nommer AC_k l'ensemble des arbres binaires complets de profondeur k.
3. Donner une définition inductive du nombre de nœuds n_k et du nombre d'arêtes a_k d'un arbre n-aire complet de profondeur k.
4. À partir des définitions inductives de n_k et a_k , montrer par récurrence sur k que $n_k = \dfrac{n^k - 1}{n - 1}$ pour $k \geq 0$, et $a_k = n \times n_{k-1}$ pour $k \geq 1$. ♢

Exercice 4 On se place dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 15, 40, 60\}$ ordonné par la relation "x divise y".
1. Représenter cette relation d'ordre par un graphe.
2. E admet-il un minimum ? un maximum ? Justifiez vos réponses.
3. On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 8, 15\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? ♢

Exercice 5 Soit $A = \{a, b, c\}$ ordonné comme l'indique le diagramme suivant

$$b \longrightarrow a \longleftarrow c$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles *non-vides et totalement ordonnés* de A.

1. Donner tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ des sous-ensembles *non-vides et totalement ordonnés* de A.
2. $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné par inclusion : représenter graphiquement l'ordre de $\mathcal{A}$. ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 6 Une fonction booléenne est *auto-duale* ssi $f(x) = \overline{f(\overline{x})}$.
1. Vérifier que les fonctions f_1 et f_2 suivantes sont égales : $f_1(x,y,z) = xy+yz+xz$, $f_2(x,y,z) = (x+y)(y+z)(x+z)$.
2. f_1 et f_2 sont-elles auto-duales ? ♢

EXERCICE 7 Trouver une formule en FNC et une formule en FND équivalentes à

$$\neg(p \wedge (q \vee s))$$

♢

EXERCICE 8 Soient F, H et G des formules du calcul propositionnel.

1. Montrer que $F \models G$ ssi $\models (F \supset G)$ (c'est-à-dire ssi $F \supset G$ est une tautologie).

2. Montrer que $(F \wedge H) \models G$ ssi $H \models (F \supset G)$.

3. Démontrer le théorème de déduction, dont on rappelle l'énoncé : $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n) \models G$ ssi $\models (F_n \supset (F_{n-1} \supset (\ldots (F_1 \supset G)...)))$, (c'est-à-dire ssi $(F_n \supset (F_{n-1} \supset (\ldots (F_1 \supset G)...)))$ est une tautologie). Indication : par récurrence sur n et en utilisant les questions 1 et 2.

4. Soient $G = p \supset (q \supset r)$ et $F = (p \supset q) \supset r$. (i). A-t-on $\{F\} \models \{G\}$? (ii). A-t-on $\{G\} \models \{F\}$? ♢

EXERCICE 9 Traduire en formules logiques, en utilisant les prédicats de Tarski, *Small(.), Large(.), Smaller(.,.), Larger(.,.), Frontof(.,.), Between(.,.,.)*, les énoncés :
1. **a** est petit ou **c** et **d** sont grands.
2. **e** et **d** sont tous deux entre **c** et **a**.
3. **e** n'est ni plus grand ni plus petit que **d**.
4. Ni **c** ni **d** ne sont à la fois devant **c**, et devant **b**. ♢

1. 1 $f\colon n \mapsto n^2$, $g(2k) = k$ et $g(2k+1) = 0$, $h(k) = 2k$, et $b(2k) = 2k+1$ et $b(2k+1) = 2k$.

2. La définition inductive du parcours préfixe d'un arbre binaire est

$$\mathrm{Pref}(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x = \emptyset, \\ a \cdot \mathrm{Pref}(g) \cdot \mathrm{Pref}(d) & \text{si } x = (a, g, d). \end{cases}$$

3. 1. $\emptyset \in AC$ et si $t \in AC$ alors $(a, \underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \in AC$.

2. Soit AC_k l'ensemble des arbres n-aires complets de profondeur k. $\emptyset \in AC_0$ avec $a \in A$, et si $t_1, \ldots, t_n \in AC_k$, alors $(a, t_1, \ldots, t_n) \in AC_{k+1}$.
3. $n_k = nn_{k-1} + 1, n_0 = 0$ et $a_k = na_{k-1} + n, a_0 = a_1 = 0$ (ou bien astuce: poser $a_0 = -1$).
4. bases : $n_0 = \frac{n^0 - 1}{n-1} = 0$ et $a_1 = n \times n_0 = 0$.
Inductions : $n_k = nn_{k-1} + 1 = n\frac{n^{k-1}-1}{n-1} + 1 = \frac{n^k - 1}{n-1}$ et
$a_k = na_{k-1} + n = n \times n \times n_{k-2} + n = n \times (n \times n_{k-2} + 1) = n \times n_{k-1}$.

4. 1.

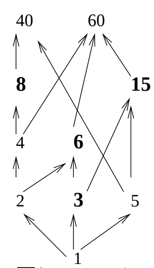

Figure 1

2 E admet-il un minimum ? oui 1 divise tous les éléments de E. un maximum ? Non car 40 ne divisent pas 60.
3. On considère le sous-ensemble $A = \{3, 6, 8, 15\}$ de E. Donner les majorants : il n'y en a pas (8 ne divise pas 60 et 6 ne divise pas 40).
les minorants de A : $\{1\}$.
Donner la borne supérieure : il n'y en a pas,
la borne inférieure : 1.
Donner les éléments maximaux : 8,6,15.
les éléments minimaux : 8,3.
A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

5. Les sous-ensembles totalement ordonnés de A sont $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$. Comme $\mathcal{A}$ est ordonné par inclusion, l'ordre de $\mathcal{A}$ est le suivant:

$$\{b\} \longrightarrow \{a,b\} \longleftarrow \{a\} \longrightarrow \{a,c\} \longleftarrow \{c\}$$

6. Pour vérifier l'égalité on peut faire la table de vérité (ou un petit raisonnement). Ensuite on constate que $\overline{f_1} = f_2$.

7. Nous obtenons $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg s)$ (FND) et la FNC par distributivité.

8.

1. voir cours 2. voir cours 3. voir cours

4. (i). Oui: il suffit de vérifier que si p est vrai et q vrai alors r est vrai, ou théorème de déduction. (ii). Non, contre exemple $p = r = 0$ et $q = 1$.

9. voir TME.