LICENCE Structures Discrètes

Partiel 15 Novembre 2006. Durée 2heures.

Documents interdits - Mettez votre numero de groupe sur la copie Merci

Téléphones portables éteints et rangés dans vos sacs- tout téléphone visible sera confisqué

Exercice 1 On considère $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{a, b, c\}$.

1. Pouvez-vous trouver (a) une application non injective et non surjective, (b) une application surjective et non injective, (c) une application injective, (d) une application bijective de E dans F ? Si oui donnez l'application, si non justifiez votre réponse. (e) Trouvez une fonction h qui ne soit pas une application de E dans F.

2. Pouvez-vous trouver (a) une application surjective et non injective, (b) une application injective et non surjective, (c) une application bijective de F dans E ? Si oui donnez l'application, si non justifiez votre réponse. $\diamondsuit$

Exercice 2 1. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par "$n\ \mathcal{R}\ m$ si et seulement si 1 est le seul diviseur commun a m et n" est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

2. Quelle est la relation $\overline{\mathcal{R}}$ complémentaire de $\mathcal{R}$? $\overline{\mathcal{R}}$ est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? $\diamondsuit$

Exercice 3 On se place dans $E = \{3, 5, 6, 18, 21, 42\}$ ordonné par la relation "x divise y".

1) Représenter cette relation d'ordre par un graphe.

2) E admet-il un maximum ? un minimum ? Justifiez vos réponses.

3) Donner les éléments maximaux, minimaux de E.

4) On considère le sous-ensemble $A = \{21, 6\}$ de E. Donner les majorants, minorants de A. A admet-il un maximum ? un minimum ? Donner la borne supérieure, la borne inférieure de A (si elles existent). Donner les éléments maximaux, minimaux de A. $\diamondsuit$

Exercice 4 Un arbre ternaire t étiqueté sur l'alpabet A est soit *vide*, soit formé d'une racine (étiquetée par une lettre de l'alpabet A) ayant 3 fils (pouvant être vides ou non). Soit AT l'ensemble de ces arbres ternaires.

1) Donner au moins quatre exemples d'arbres ternaires sur l'alphabet $A = \{a, b\}$.

2) Donner une définition inductive de l'ensemble AT des arbres ternaires.

3) Soient $n(t)$ le nombre de nœuds de t et $ar(t)$ le nombre d'arêtes de t. Donner une définition inductive de n et ar.

4) Montrer par induction que si t est un arbre ternaire non vide $n(t) = ar(t) + 1$.

5) Donner une définition inductive du parcours préfixe d'un arbre ternaire. Rappel : le parcours préfixe est la suite des étiquettes rencontrées en parcourant l'arbre de haut en bas puis de gauche à droite : on écrit d'abord l'étiquette de la racine, puis on parcourt ses fils en allant de gauche à droite. Par exemple les parcours préfixes des arbres dessinés ci-dessous sont abc et $abfcdeg$.

Figure 1

$\diamondsuit$

Exercice 5 La duale d'une fonction booléenne f est définie par $\widetilde{f}(x, y) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})}$. f est dite *auto-duale* ssi $f = \widetilde{f}$.

1) Donnez la table de vérité de la fonction $f(x, y) = \overline{x}\,\overline{y} + y\overline{x}$, sa fonction duale et la table de vérité de sa fonction duale. Que remarquez-vous ?

2) Donnez deux fonctions booléennes auto-duales. $\diamondsuit$

1. 1 $g\colon E \longrightarrow F \quad g(a)=b\ ,\ g(b)=b\ ,\ g(c)=a\ ,\ g(d)=a$; g est non injective et non surjective ;

$f\colon E \longrightarrow F \quad f(a)=b\ ,\ f(b)=c\ ,\ f(c)=a\ ,\ f(d)=a$: f est surjective et non injective, on ne peut pas trouver d'injection par le principe des tiroirs, et donc pas de bijection non plus.

$h\colon E \longrightarrow F \quad h(a)=b\ ,\ h(c)=a\ ,\ h(d)=c$: h est une fonction et n'est pas une application.

2.$h\colon \{a,b,c\} \longrightarrow E \quad h(a)=b\ ,\ h(b)=b\ ,\ h(c)=d$; h est injective non surjective. Il n'y a pas de surjection de F dans E puisque $|E|>|F|$. Il n'y a donc pas non plus de bijection de F dans E.

2. 1. $\mathcal{R}$ est symétrique, non réflexive et non transitive. Contrexemples : réflexive: on n'a pas $2\mathcal{R}2$; transitivité: on a $2\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}2$ et pas $2\mathcal{R}2$

2. La relation $\overline{\mathcal{R}}$ sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ définie par "$n\overline{\mathcal{R}}m$ si et seulement si n et m ont un diviseur commun différent de 1". Cette relation n'est pas transitive. Par exemple, 2 et 6 ont un diviseur commun (2), 6 et 3 ont un diviseur commun (3), mais le diviseur commun à 2 et 3 est 1. Elle est symétrique et non réflexive car pour $n=1=m$, on n'a pas $1\ \mathcal{R}\ 1$. Elle est réflexive sur $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

3. 1)

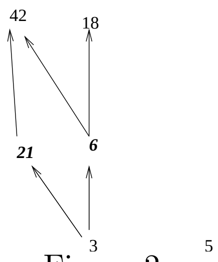

Figure 2

2) E admet-il un minimum ? non 3 et 5 premiers entre eux. un maximum ? Non car 5 ne divise pas 42.

3) Éléments maximaux, minimaux de E ; maximaux : 5,18,42 et minimaux : 5 et 3.

4) On considère le sous-ensemble $A=\{21,6\}$ de E. Donner les majorants : 42.

les minorants de A : $\{3\}$.

Donner la borne supérieure : 42,

la borne inférieure : 3.

Donner les éléments maximaux : 21,6.

les éléments minimaux : 21,6.

A admet-il un maximum ? NON . un minimum ? NON

4. 1) $\emptyset$, $(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset)$, $(b,\emptyset,(a,\emptyset,\emptyset,\emptyset),\emptyset)$, $(a,(b,\emptyset,\emptyset,\emptyset),\emptyset,(b,\emptyset,\emptyset,\emptyset))$

2) La définition inductive de l'ensemble AT est

(B) $\emptyset \in AT$.

(I) $t_1,t_2,t_3 \in AT \implies \forall a\in A,\ (a,t_1,t_2,t_3)\in AT$

3)

(B) $n(\emptyset) = 0$
(I) si $\forall b \in A$, si $t = (b, t_1, t_2, t_3)$ est un arbre ternaire, alors $n(t) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} n(t_i)$.
(B) $ar(\emptyset) = 0$, et
(I)

$$ar(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset); \\ 1 + ar(t_i), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset,\ t_j = t_k = \emptyset,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}\ ; \\ 2 + ar(t_i) + ar(t_j), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset \neq t_j,\ t_k = \emptyset,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}\ ; \\ 3 + \sum_{i=1}^{i=3} ar(t_i), & \text{si } t = (a, t_1, t_2, t_3) \text{ et } t_i \neq \emptyset,\ \forall i \in \{1, 2, 3\}\ ; \end{cases}$$

4) Soit $P(x)$ la propriété "$n(x) = ar(x) + 1$".
(B) $\forall a \in A$, si $t = (a, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ alors $n(t) = 1 = 0 + 1 = ar(t) + 1$.
(I) Si $t = (a, t_1, t_2, t_3)$, avec au moins un des t_i non vide, et on suppose $n(t_i) = ar(t_i) + 1$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. On reprend les différents cas de la définition de ar.

1. si $t = (a, t_1, t_2, t_3)$ et $t_i \neq \emptyset$, $t_j = t_k = \emptyset$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $ar(t) = 1 + ar(t_i)$ et $n(t) = 1 + n(t_i)$ donc $n(t) = 1 + ar(t)$.
2. si $t = (a, t_1, t_2, t_3)$ et $t_i \neq \emptyset \neq t_j$, $t_k = \emptyset$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $ar(t) = 2 + ar(t_i) + ar(t_j)$ et $n(t) = 1 + n(t_i) + n(t_j) = 1 + 1 + ar(t_i) + 1 + ar(t_j)$ et donc $n(t) = 1 + ar(t)$.
3. si $t = (a, t_1, t_2, t_3)$ et $t_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $n(t) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} n(t_i) = 1 + \sum_{i=1}^{i=3} (1 + ar(t_i))$ et $ar(t) = 3 + \sum_{i=1}^{i=3} ar(t_i)$, d'où $n(t) = 1 + ar(t)$.

5)
(B) $pref(\emptyset) = \varepsilon$
(I) $pref(\ (a, t_1, t_2, t_3)\ ) = a\, pref(t_1)\, pref(t_2)\, pref(t_3)$

5. 1. On remarque que $f(x, y) = \overline{xy} + y\overline{x} = \overline{x}(\overline{y} + y) = \overline{x}$. f est donc autoduale.
2. les autres fonctions autoduales sont $f(x, y) = x$, $f(x, y) = y$ et $f(x, y) = \overline{y}$.