EXAMEN LICENCE O.M.I. - Janvier 2000
les exercices sont indépendants

EXERCICE 1 Calculer $\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} C_n^p C_p^k (-1)^{n-p} t^{n-p+k} (1-3t)^{p-k}$. $\diamondsuit$

EXERCICE 2 Un arbre n-aire est un arbre dont chaque nœud a 0 ou n fils. Un arbre n-aire de hauteur h est dit équilibré si toutes ses feuilles sont à la hauteur h ou $h-1$. Soit AnE l'ensemble des arbres n-aires équilibrés étiquetés sur $A = \{a\}$.
1) Donner une définition inductive de l'ensemble des arbres n-aires équilibrés de hauteur ≥ 1. (Indication : une base possible est : $(a, \emptyset, \ldots, \emptyset) \in \mathrm{AnE}_1$, et si $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{AnE}_{h-1} \cup \{\emptyset\}$ alors . $(a, t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{AnE}_2$.
2) Donner une définition inductive du nombre de feuilles $f(t)$ de t, si t est un arbre n-aire équilibré.
3) Montrer que le nombre de feuilles d'un arbre n-aire équilibré de hauteur h est $\geq h-1$. $\diamondsuit$

EXERCICE 3 Soit $\phi = \forall x \exists y \big(p(x) \wedge q(y)\big)$ et $\psi = \exists y \forall x \big(p(x) \wedge q(y)\big)$. Laquelle des déductions suivantes est correcte? Vous justifierez votre réponse en précisant les règle s appliquées à chaque étape de la déduction correcte, et en donnant un contre xemple pour l'étape fausse de la déduction fausse. Vous pourrez utiliser toutes les règle s de la forme $\mathcal{F} \vdash F$ ou $F \iff G$ énoncées dans le cours.

1)
$$\phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad \text{(instantiation)}$$
$$\phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge \exists y q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \Big(\forall x p(x)\Big) \wedge \Big(\exists y q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \exists y \Big(\forall x p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$

2)
$$\phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad \text{(instantiation)}$$
$$\phi \vdash \neg \forall y \neg \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \neg\neg \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \neg \forall y \neg \forall x \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$
$$\phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y)\Big) \quad (...?)$$

$\diamondsuit$

T.S.V.P.

EXERCICE 4 Soient f, g des fonctions booléennes d'arité 2. On dit que $f \leq g$ si $f(x,y) = 1 \longrightarrow g(x,y) = 1$.

1) Montrer que $f \leq g$ ssi $f + g = g$.

2) A-t-on $f \leq g$ ou $g \leq f$ pour les couples de fonctions suivantes :

- $f(x,y) = x$ et $g(x,y) = x + y$;
- $f(x,y) = \overline{x}$ et $g(x,y) = x + y$;

3) Montrer que $f \leq f + g$ et $fg \leq g$.

$\diamondsuit$

EXERCICE 5 Soit P l'ensemble des 2 formules :

r_1 : $$arc(X,Y), M(Y) \supset chem(X,Y)$$

r_2 : $$arc(X,Z), chem(Z,Y) \supset chem(X,Y)$$

et Q l'ensemble des 2 formules :

r_1 : $$arc(X,Y), M(Y) \supset chem(X,Y)$$

r_3 : $$arc(X,Z), chem(Z,Y), M(Z) \supset chem(X,Y)$$

1) On considère l'interprétation I donnée par $E_I = \mathbb{Z}$ (les entiers relatifs), $arc_I(x,y) = 1$ ssi $y = x + 1$, $M_I(x) = 1$ ssi $x \geq 0$ et $chem_I(x,y) = 1$ ssi $-1 \leq x < y$.

I est-elle un modèle de P, de Q? Justifiez votre réponse.

2) Trouver un modèle de P et un modèle de Q.

3) Comparer l'ensemble des modèles de P etl'ensemble des modèles de Q. Justifiez votre réponse. $\diamondsuit$

EXERCICE 6 Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$ et soient L_1 le langage comprenant tous les mots contenant "aa" et L_2 le langage comprenant tous les mots ne contenant pas "bb".

1. Donner pour chaque L_i un automate déterministe complet A_i reconnaissant L_i.
2. Construire à partir des A_i un automate déterministe et complet A reconnaissant $L_1 \cap L_2$.
3. A est-il minimal ? $\diamondsuit$

0.1 Solutions des exercices.

1. $\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} C_n^p C_p^k (-1)^{n-p} t^{n-p+k}(1-3t)^{p-k} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^{n-p} t^{n-p} (\sum_{k=0}^{p} C_p^k t^k (1-3t)^{p-k}) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^{n-p} t^{n-p} (t+1-3t)^p = (-t+1-2t)^n = (1-3t)^n$.

2. 1) Si $t_1, \ldots, t_n \in$AnE$_{h-1}$, alors $(a, t_1, \ldots, t_n) \in$AnE$_h$ pour $h > 2$.

2) $f(a(t_1, \ldots, t_n)) = \sum_1^n f(t_i)$.

3) Evident.

3.

$$
\begin{array}{llr}
1) & \phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash p(x) \wedge \Big(\exists y q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } y \text{ non libre dans } p(x)) \\
 & \phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge \exists y q(y) \Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi) \\
 & \phi \vdash \Big(\forall x p(x) \Big) \wedge \Big(\exists y q(y) \Big) \ hfill & \text{(prop. 5.43, } x \text{ non libre dans } \exists y q(y)) \\
 & \phi \vdash \exists y \Big(\forall x p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } x \text{ non libre dans } \exists y q(y)) \\
 & \phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(prop. 5.43, } y \text{ non libre dans } p(x)) \\
2) & \phi \vdash \exists y \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(instantiation)} \\
 & \phi \vdash \neg \forall y \neg \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(définition de } \exists) \\
 & \phi \vdash \neg\neg \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(FAUX)} \\
 & \phi \vdash \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(double négation)} \\
 & \phi \vdash \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(généralisation, } x \text{ non libre dans } \phi) \\
 & \phi \vdash \neg \forall y \neg \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) l & \text{(non justifié)} \\
 & \phi \vdash \exists y \forall x \Big(p(x) \wedge q(y) \Big) & \text{(définition de } \exists)
\end{array}
$$

4.

5. 1) I est un modèle de Q, pas de P
2) un modèle de P est $chem_I(x, y) = 1$ ssi $x < y$ et $0 < y$.
3) tout modèle de Q est modèle de P car r_3 est plus fort que r_2.

6. avec la construction bête je trouve A à 8 tats minimal.