LICENCE O.M.I. - T.D. Combinatoire

EXERCICE 1 Montrer que
1) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n = 2C_{2n-1}^{n-1}$,
2) $C_n^q C_{n-q}^{p-q} = C_n^p C_p^q$ pour $0 \leq q \leq p \leq n$. ♢

EXERCICE 2 Dans les mains de 5 cartes extraits d'un jeu de 32 cartes combien de mains sont possibles:
1) contenant un carré (4 cartes de force égale).
2) contenant un brelan (3 cartes de force égale) et rien d'autre.
3) contenant une paire (2 cartes de force égale) et rien d'autre. ♢

EXERCICE 3 $|E| = n$, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = n_1$, $|B| = n_2$. Calculer le nombre N de parties à p éléments, avec $p \geq 2$,
1) ayant exactement un élément dans A et un élément dans B.
2) ayant au moins un élément dans A et un élément dans B. ♢

EXERCICE 4 Calculer le nombre N de partitions en n parties à p éléments d'un ensemble à np éléments. ♢

EXERCICE 5 1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

2) Montrer que $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n \ = \ n\ 2^{n-1}$. ♢

EXERCICE 6 Calculer $S = \displaystyle\sum_{q=0}^{p} \ (-1)^q C_n^q C_{n-q}^{p-q}$, pour $p \leq n$. ♢

EXERCICE 7 1) Montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} C_{n+p}^p = C_{n+k+1}^k$, pour $k \geq 0$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^p$, pour $p = 1, 2, 3$. ♢

EXERCICE 8 Montrer que $C_{a+b}^p = \displaystyle\sum_{k=\mathrm{sup}(0,p-b)}^{\mathrm{inf}(p,a)} C_a^k C_b^{p-k}$, avec $p \leq a + b$. ♢

EXERCICE 9 1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_n^i C_n^{i+k} = C_{3n}^n$. ♢

EXERCICE 10 Parmi les permutations de $\{a, b, c, d, e, f\}$ combien y en a-t-il qui ne contiennent ni "ac", ni "bde" ? ♢

EXERCICE 11 On dispose de n lettres non toutes distinctes : q_1 lettres $a_1, \ldots, q_p$ lettres a_p, telles que $q_1 + q_2 + \cdots + q_p = n$.

1) Combien de mots différents de longueur n peut-on former avec ces n lettres ?

T.S.V.P.

a) En déduire une représentation du polynôme formel $(X_1 + X_2 + \cdots + X_p)^n$.
b) En déduire une expression des coefficients multinomiaux en fonction des coefficients binomiaux.

2) En déduire que $(k!)!$ est divisible par $k!^{(k-1)!}$.

3) Calculer le nombre de mots de longueur 13 que l'on peut former avec $q_1 = 5$ lettres a_1 , et $q_2 = 8$ lettres a_2 . ♢

EXERCICE 12 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}-\{0\}$, on note $F(n,p)$ le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = n$. On cherche à calculer $F(n,p)$.

Méthode 1

a) Montrer que $F(n, p+1) = \sum_{k=0}^{n} F(k,p)$.
b) Montrer que $C_{n+p}^{p} = \sum_{k=0}^{n} C_{k+p-1}^{p-1}$, pour $n \geq 0$, et $p \geq 1$.
c) Calculer $F(n,p)$.

Méthode 2

a) Montrer que $F(n, p+1) = F(n,p) + F(n-1, p+1)$.
b) Montrer que $F(n,p) = C_{n+p-1}^{n}$. ♢

EXERCICE 13 En utilisant le résultat de l'exercice précédent, déterminer le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ solutions de l'inéquation $x_1 + x_2 + \ldots + x_p \ \leq \ n$. ♢

EXERCICE 14 Une fonction f de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, m\}$ est dite croissante si $x < y \longrightarrow f(x) < f(y)$, et croissante au sens large si $x \leq y \longrightarrow f(x) \leq f(y)$.

1) Combien existe-t-il de fonctions croissantes (en fonction de n et m)?
2) Combien existe-t-il de fonctions croissantes au sens large? ♢