LICENCE O.M.I. - T.D. Induction

EXERCICE 1 On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n > 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Montrer que pour tout $n > 0$:

1) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
2) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
4) (Janvier 97) F_{3n} est pair.
5) $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ♢

EXERCICE 2 (Contre exemples) On considère les propriétés $P(n)$: “$9 \mid 10^n - 1$” et $Q(n)$: “$9 \mid 10^n + 1$”.
1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$
2) Trouver les valeurs de n pour lesquelles $P(n)$ (resp. $Q(n)$) est vraie.
3) Mêmes questions pour $R(n)$: “$3 \mid 4^n + 7^n$”. ♢

EXERCICE 3 (exam Janvier 96) Donner une définition inductive de $f(n) = a^{2^n}$.

Indication. On pourra remarquer que $a^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2$. ♢

EXERCICE 4 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$.
2) En déduire que tout entier m peut s'écrire comme somme et différence des carrés $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ pour un certain n, c'est-à-dire

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\},\ m = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \cdots + \varepsilon_n n^2$$

(Indication: montrer d'abord le résultat pour $m \in \{0, 1, 2, 3\}$). ♢

EXERCICE 5 Donner une définition inductive de la hauteur $h(t)$, du nombre de nœuds $n(t)$, du nombre d'arêtes $a(t)$ et du nombre de feuilles $f(t)$ d'un arbre binaire. ♢

EXERCICE 6 Soit t un arbre, $h(t)$ sa hauteur, $n(t)$ le nombre de ses nœuds, $f(t)$ le nombre de ses feuilles. On suppose que t est un arbre binaire (0, 1 ou 2 fils par nœud). Montrer que $n(t) \leq 2^{h(t)} - 1$, et que $f(t) \leq 2^{h(t)-1}$. ♢

EXERCICE 7 Soit t un arbre binaire *strict* (c'est-à-dire que t est non vide, chaque nœud de t a exactement 0 ou 2 fils et il n'y a aucun noeud avec un seul fils non vide). Soit $n(t)$ le nombre de ses nœuds, $f(t)$ le nombre de ses feuilles et $a(t)$ le nombre de ses arêtes.
1) Donner une définition de l'ensemble ABS des arbres stricts.
2) Montrer que si t est un arbre binaire *strict* non vide $n(t) = a(t) + 1$.
3) Montrer que si t est un arbre binaire *strict* non vide $n(t) = 2f(t) - 1$. ♢

EXERCICE 8 Un arbre n-aire *complet* est un arbre où :

- chaque nœud interne a exactement n fils,
- toutes les feuilles sont à la même profondeur.

L'arbre vide est un arbre n-aire de profondeur 0.

1) Donner une définition inductive des arbres n-aires complets et étiquetés sur l'alphabet $A = \{a\}$ (toutes les feuilles sont des a).
2) Calculer le nombre de nœuds et le nombre d'arêtes d'un arbre n-aire complet de profondeur k. ♢

T.S.V.P.

EXERCICE 9 Un arbre binaire est *équilibré* si pour chaque noeud de l'arbre, la différence de hauteur des sous-arbres gauche et droit est au plus 1.
1) Donner une définition de l'ensemble AVL des arbres binaires équilibrés.
2) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $u_0 = 0, u_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1.$$

Montrer que $\forall x \in AVL$, $n(x) \geq u_{h(x)}$, où h et n sont les fonctions donnant respectivement la hauteur et le nombre de noeuds d'un arbre. ♢

EXERCICE 10 Définir le parcours préfixe d'un arbre binaire. ♢

EXERCICE 11 Soit A^* le monoïde libre engendré par l'alphabet A.
Le miroir d'un mot $u = a_1a_2\cdots a_n$ est le mot $\tilde{u} = a_n\cdots a_2a_1$. Donner une définition inductive du miroir. ♢

EXERCICE 12 Les listes de lettres L de l'alphabet A sont définies inductivement par:
(B) $\varepsilon \in L$,
(I) $\forall l \in L$, $\forall a \in A$, $(al) \in L$.
Définissons $g(x, y)$ sur $L \times L$ par, $\forall a \in A$, $\forall l \in L$, $\forall y \in L$,

$$g(\varepsilon, y) = y \ ,$$
$$g((al), y) = g(l, (ay)) \ .$$

1) Soit $Q(x)$ le prédicat '$\forall y$, $g(x, y)$ est défini'. Prouver par induction sur x que $Q(x)$ est vrai sur L.
2) Calculer $g((a_1), y)$, pour $a_1 \in A$, $y \in L$.
3) Prouver par induction sur n (pour $n \geq 1$) que

$$g\big((a_n(a_{n-1}(\ldots(a_1)\ldots))), y\big) = g\big(\varepsilon, (a_1(\ldots(a_{n-1}(a_ny))\ldots))\big).$$

4) Soit $rev(x) = g(x, \varepsilon)$. Déduire de la question 3 que, pour $a_1, \ldots, a_n \in A$,
$rev\big((a_n(a_{n-1}(\ldots(a_1)\ldots)))\big) = (a_1(\ldots(a_{n-1}(a_n))\ldots))$. ♢

EXERCICE 13 Soit $F_0 = \{a\}$, $F_1 = \{s\}$, $F = F_0 \bigcup F_1$. L'ensemble T des termes construits sur F est $T = \{a, s\big(a\big), s\big(s\big(a\big)\big), \ldots\}$.
Posons $V = \mathbb{N}$. Soit $h\colon F_0 \longrightarrow V$, et $h_s\colon V \longrightarrow V$; il existe une et une seule fonction h^* de T dans V telle que:
(B') Si $t \in F_0$, $h^*(t) = h(t)$,
(I') Si $t = f\big(t_1, \ldots, t_n\big)$, $h^*(t) = h_f(h^*(t_1), \ldots, h^*(t_n))$.
Calculer h^* dans les cas suivants : 1) $h_1(a) = 0$, $h_{1s}(n) = n + 1$.
2) $h_2(a) = 1$, $h_{2s}(n) = 2n$.
3) $h_3(a) = 1$, $h_{3s}(n) = n + 2$. ♢

EXERCICE 14 Soit X un ensemble de "variables" et F un ensemble de "fonctions", on définit inductivement l'ensemble $T(F, X)$ des termes sur F et X de la façon suivante :

(B) Si $x \in X$ alors $x \in T(F, X)$; si $f \in F_0$, alors $f \in T(F, X)$;
(I) Si $t_1, \ldots, t_n \in T(F, X), n \geq 1$ et $f \in F_n$, alors $f(t_1, \ldots t_n) \in T(F, X)$.

Une application φ de $T(F, X)$ dans $T(F, X)$ est un *morphisme* si elle vérifie $\varphi(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n))$. Soit une application h de X dans $T(F, X)$, montrer qu'il existe un morphisme unique h^* de $T(F, X)$ dans $T(F, X)$ qui prolonge h (c'est à dire, tel que $\forall x \in X,\ h^*(x) = h(x)$). ♢

Exercice 15 Soit G un graphe (non orienté) connexe à n sommets. Montrer par récurrence sur n que G a au moins $n-1$ arêtes. Indication : ne pas faire le raisonnement *faux* suivant : "soit G connexe à n sommets, ajoutons un sommet supplémentaire pour obtenir un graphe G_1 à $n+1$ sommets, pour que G_1 soit connexe, il faut relier le nouveau sommet à G par au moins une arête, or (par hypothèse de récurrence) G a au moins $n-1$ arêtes, donc G_1 a au moins n arêtes, CQFD..." ♢

Exercice 16 (exam Janvier 97) On considère les suites finies de 0 et de 1, c'est-à-dire les mots du monoide libre $M = \{0,1\}^*$. On définit le sous-ensemble L de M par

(B) $\varepsilon \in L$, $001 \in L$,
(I) si $w = a_1 \dots a_n \in L$ et p est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ alors $w' = a_{p(1)} \dots a_{p(n)} \in L$
si $w_1 \in L$ et $w_2 \in L$ alors $w_1 w_2 \in L$.

Montrer par induction que pour tout mot $w \in L$, $|w|_0 = 2|w|_1$. Obtient-on ainsi tous les mots qui ont deux fois plus de 0 que de 1? Justifiez votre réponse. ♢

Exercice 17 On considère le monoïde libre M sur un alphabet fini A. On note u^p le mot $u \dots u$, où p exemplaires de u ont été concaténés. On dit que mot u est un *facteur gauche* d'un mot v, s'il existe un mot w tel que $v = uw$, (de même, u est facteur droit de v si on peut écrire $v = wu$). Soit α et β deux mots.

1) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'un d'entre eux soit facteur gauche de l'autre est qu'il existe deux mots u et v tels que $\alpha u = \beta v$.

2) On suppose que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Montrer que cela équivaut à : $\exists \gamma \in M, \exists (p,q) \in N \times N, \alpha = \gamma^p, \beta = \gamma^q$. ♢

Exercice 18 Les notations sont les mêmes que dans l'exercice précédent Exercice 17. On appelle *langage* (sur l'alphabet A) un sous-ensemble de M. On définit inductivement les langages *rationnels* (on dit aussi *réguliers*) par :

(i) Un langage fini est rationnel,
(ii) Si L_1 et L_2 sont rationnels alors $L_1 \cup L_2$ est rationnel,
(iii) Si L_1 et L_2 sont rationnels alors $L_1 L_2 = \{uv, u \in L_1, v \in L_2\}$ est rationnel,
(iv) Si L est rationnel alors $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ est rationnel ($L^0 = \{\epsilon\}$).

On appelle *miroir* du mot $u = a_1 \cdots a_n$, le mot $\tilde{u} = a_n \cdots a_1$. Si L est un langage, on définit $\tilde{L} = \{\tilde{u}, u \in L\}$. Montrer que si L est un langage rationnel, alors $\tilde{L}$ est également rationnel. ♢

Exercice 19 Soit A un alphabet fini et $\overline{A}$ un alphabet disjoint de A et en bijection avec A. Si $a \in A$, on notera $\overline{a}$ l'image de a par cette bijection. On définit une application $\tau\colon (A \cup \overline{A})^* \to A^* \cup \{\perp\}$ par :

(i) $\tau(\epsilon) = \epsilon$)
(ii) $\tau(\alpha a) = \perp$ si $\tau(\alpha) = \perp$ et $\tau(\alpha)a$ sinon,
(iii) $\tau(\alpha\overline{a}) = \perp$ si $\tau(\alpha) = \perp$, β si $\tau(\alpha) = \beta a$ et $\perp$ sinon.

1) Calculer $\tau(\alpha)$ avec $\alpha = a\, b\, \overline{b}\, a\, \overline{a}\, \overline{a}$
2) Montrer :
a) $\tau(\alpha) = \perp \Rightarrow \forall\beta, \tau(\alpha\beta) = \perp$,
b) $\tau(\alpha) = \tau(\beta) \Rightarrow \forall\gamma, \tau(\alpha\gamma) = \tau(\beta\gamma)$
c) $\tau(\alpha) \neq \perp$ et $\tau(\beta) \neq \perp \Rightarrow \tau(\alpha)\tau(\beta) = \tau(\alpha\beta)$. ♢

Exercice 20 (exam Septembre 95) On dit qu'un ensemble ordonné est un *treillis* si tout sous-ensemble fini d'éléments de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Montrer qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un treillis si et seulement si tout sous-ensemble à deux éléments de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Indication: montrer par récurrence sur n que si tout sous-ensemble à deux éléments de E admet une borne supérieure et une borne inférieure, alors tout sous-ensemble fini à n éléments de E admet une borne supérieure et une borne inférieure. $\diamondsuit$

Exercice 21 Soient $(E, \leq)$ et $(E', \leq')$ deux ordres bien fondés. $E \times E'$ muni de l'ordre produit (resp. lexicographique) est-il bien fondé ? $\diamondsuit$

Exercice 22 Les ordres suivants sont-ils bien fondés ?
1. sur A^2, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
2. sur $\mathbb{N}$ $m \leq n$ ssi m divise n.
3. sur l'ensemble des diviseurs d'un entier donné, la relation du 2.
4. sur A^*, l'ordre préfixe.
5. sur A^*, l'ordre $u \leq v$ ssi u est un sous-mot de v.
6. sur A^*, l'ordre lexicographique (A alphabet totalement ordonné).
7. sur $A^*/\equiv$, l'ordre des longueurs $u \leq v$ ssi $|u| \leq |v|$ (où $\equiv$ est défini par $u \equiv v$ si et seulement si $|u| = |v|$). $\diamondsuit$

Exercice 23 (Fonction d'Ackerman) Soit $f\colon N \times N \to N$ définie par :

$$\begin{aligned}
&f(0, n) = n + 1,\\
&f(m, 0) = f(m - 1, 1),\\
&f(m, n) = f(m - 1, f(m, n - 1)).
\end{aligned}$$

1) Montrer que $f(m, n)$ est définie pour tout couple $(m, n) \in N \times N$.
2) Calculer $f(1, n)$ et $f(2, n)$. $\diamondsuit$