LICENCE O.M.I. - TD Révisions

EXERCICE 1 Soit $\mathbf{AB}$ l'ensemble des arbres binaires étiquetés sur un ensemble E. Pour $T \in \mathbf{AB}$, on note $f(T)$ le nombre de feuilles de T.
1) On donne la définition inductive suivante du nombre de nœuds internes (ni) d'un arbre binaire :

$$\begin{array}{ll} \text{(B)} & ni(\emptyset) = 0 \\ \text{(I)} & ni(x,g,d) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = d = \emptyset, \\ 1 + ni(g) + ni(d) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que : $\forall T \in \mathbf{AB} \qquad f(T) \leq ni(T) + 1$.
2) a) Donner une définition inductive du nombre de nœuds à deux fils (nd) d'un arbre binaire.
b) Montrer que : $\forall T \in \mathbf{AB} \quad (T \neq \emptyset \Longrightarrow f(T) = nd(T) + 1)$. ♢

EXERCICE 2 On pose

$$f(n,p) = \begin{cases} n & \text{si } p = 0, \\ p & \text{si } n = 0, \\ f(n,p-1) + f(n-1,p) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f(n,p)$ est défini pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ♢

EXERCICE 3 On pose

$$f(n,p) = \begin{cases} n & \text{si } p = 0, \\ p & \text{si } n = 0, \\ f(n,p-1) + f(n-1,p+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f(n,p)$ est défini pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ♢

EXERCICE 4 Si l'on pose

$$f(n,p) = \begin{cases} n & \text{si } p = 0, \\ p & \text{si } n = 0, \\ f(n+1,p-1) + f(n-1,p+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f(n,p)$ est-il défini pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$? ♢

EXERCICE 5 Soit la fonction booléenne $f(x,y,z) = xy + y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}$. Trouver un polynôme booléen pour la fonction duale. ♢

EXERCICE 6 On définit inductivement des fonctions booléennes $f_n : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ par

$$f_1(x) = \overline{x} \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \overline{x_{n+1}} f_n(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Montrer que $f_n(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ssi il y a un nombre pair de 1 dans $(x_1, \ldots, x_n)$.
Donner une définition inductive des fonctions booléennes $g_n : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ telles que $g_n(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ssi il y a un nombre impair de 1 dans $(x_1, \ldots, x_n)$. ♢

EXERCICE 7 1) Montrer que le séquent $(\{p, p \supset (q \supset r), \neg r\}, \neg q)$ est valide.

T.S.V.P.

2) Montrer que $\{p, p \supset (q \supset r), \neg r\} \vdash \neg q$, en précisant quelle règle on utilise à chaque étape du raisonnement. $\diamondsuit$

EXERCICE 8 Trouver une formule prénexe équivalente à $(\exists x P(x)) \supset (\exists x Q(x))$. $\diamondsuit$

EXERCICE 9 Soit L un alphabet contenant le prédicat binaire P. Soit les formules

$$F_1 = \exists x \forall y P(x, y)$$

$$F_2 = \forall x \forall y \exists z ((P(x, z) \wedge P(y, z)) \wedge \forall t((P(x, t) \wedge P(y, t)) \supset P(z, t)))$$

1) On définit une interprétation I_1 par $I_1 = \langle E_1, \gamma_1 \rangle$, avec $E_1 = \mathbb{N}$ et $\gamma_1(P)(n, p) = vrai$ si et seulement si $n \geq p$. I_1 est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2$? I_1 est-elle modèle de $\{F_1, F_2\}$?
2) On définit une interprétation I_2 par $I_2 = \langle E_2, \gamma_2 \rangle$, avec $E_2 = \{a, b\}^*$ et $\gamma_2(P)(u, v) = vrai$ si et seulement si u est un préfixe de v (on rappelle que u est un préfixe de v ssi il existe $f \in \{a, b\}^*$ tel que $v = uf$). I_2 est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2$? I_2 est-elle modèle de $\{F_1, F_2\}$?
3) On définit l'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ sur $\{a, b\}^*$ de la manière suivante :
$u \leq_{lex} v$ ssi u préfixe de v ou ($u = waf$ et $v = wbg$).
On définit une interprétation I_3 par $I_3 = \langle E_3, \gamma_3 \rangle$, avec $E_3 = \{a, b\}^*$ et $\gamma_3(P)(u, v) = vrai$ si et seulement si $u \leq_{lex} v$. I_3 est-elle modèle de F_j pour $j = 1, 2$? I_3 est-elle modèle de $\{F_1, F_2\}$? $\diamondsuit$

EXERCICE 10 Calculer :

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} C_n^p C_p^k t^{n-p+k} (1-2t)^{p-k}$$

$\diamondsuit$

EXERCICE 11 Soit $A = \{a, b, c\}$.
1) Combien y-a-t-il, dans A^*, de mots de longueur n contenant exactement deux lettres c et deux fois plus de lettres a que de lettres b ?
2) Combien y-a-t-il, dans A^*, de mots de longueur n contenant autant de lettres a que de lettres b et dont le nombre de lettres b et le nombre de lettres c diffèrent d'au plus 1 ? $\diamondsuit$

EXERCICE 12 On dispose de dalles rectangulaires de 1 mètre sur 2 mètres et on veut paver un couloir de 2 mètres de large sur n mètres de long. Soit u_n le nombre de pavages possibles. Donner une relation de récurrence permettant de calculer u_n pour $n \geq 1$. $\diamondsuit$

EXERCICE 13 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + n \quad \text{si } n \geq 2 \qquad u_0 = 0 \qquad u_1 = 0.$$

Calculer u_n par la méthode du polynôme caractéristique. $\diamondsuit$

EXERCICE 14 Soit u_n le nombre d'arbres binaires de taille n étiquetés sur un ensemble E de cardinal k.
1) Calculer u_0, u_1, u_2.
2) Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer u_n et calculer u_n. $\diamondsuit$

EXERCICE 15 Soit $A = \{a, b, c\}$. Construire un automate déterministe complet qui reconnaît l'ensemble des mots de longueur paire qui se terminent par ab. $\diamondsuit$

EXERCICE 16 1) Soit l'automate $\mathcal{A}$ d' états 0, 1, d'état initial 0, d'état terminal 1 et de transitions : $0.a = 0$, $0.b = 1$, $1.a = 0$ et $1.b = 1$. (Dessiner l'automate $\mathcal{A}$.) Soit L le langage reconnu par $\mathcal{A}$. Donner le système d'équations associé à $\mathcal{A}$ et en déduire une expression rationnelle pour L.
2) Mêmes questions avec $\mathcal{B}$ d' états 0, 1, 2 d'état initial 0, d'état terminal 0 et de transitions : $0.a = 1$, $0.b = 0.c = 0$, $1.b = 1$, $1.c = 2$, $2.a = 2$, $2.b = 0$ et $2.c = 1$. $\diamondsuit$

EXERCICE 17 Soit l'automate $\mathcal{A}$ d' états 0, 1, 2, 3, 4, 5 d'état initial 0, d'état terminal 5 et de transitions : $0.a = 1$, $1.a = 2.a = 2$, $3.a = 4.a = 4$, $5.a = 5$, $0.b = 3$, $1.b = 2.b = 3.b = 4.b = 5.b = 5$. (Dessiner l'automate $\mathcal{A}$.) Minimiser l'automate $\mathcal{A}$. $\diamondsuit$