TABLE DES MATIÈRES

Contents. See page xi

Introduction xiv

I Calcul ensembliste - Fonctions 1
I.1 Calcul ensembliste 1
I.1.1 Ensemble, élément, inclusion 1
I.1.2 Réunion, intersection, différence, complémentaire, partition 2
I.2 Fonctions 4
I.2.1 Définitions 4
I.2.2 Propriétés 5
I.3 Cardinaux 7
I.3.1 Ensembles finis 7
I.3.2 Ensembles dénombrables 8
I.4 Opérations et relations 9
I.4.1 Opérations binaires 9
I.4.2 Relations 10
I.4.3 Opérations ensemblistes sur les relations 11
I.4.4 Autres opérations sur les relations 11
I.4.5 Quelques propriétés des relations binaires 12
I.4.6 Relations d'équivalence 13
I.4.7 Congruences 14

II Ensembles ordonnés 17
II.1 Les relations d'ordre et de préordre 17
II.1.1 Ordres larges et ordres stricts 17
II.1.2 Ordres totaux et ordres partiels 18
II.1.3 Préordres 19
II.2 Ensembles ordonnés 20
II.2.1 Applications monotones 20
II.2.2 Ensembles totalement ordonnés 21
II.2.3 Produits d'ensembles ordonnés 21
II.2.4 Sous-ensembles ordonnés. Chaînes et antichaînes 22
II.3 Majorants et minorants 23

II.4 Ensembles bien fondés et induction 25
II.5 Ensembles complets. Treillis 27
II.5.1 Ensembles complets et fonctions continues 27
II.5.2 Points fixes de fonctions monotones 29
II.5.3 Treillis 30

III Récursion et induction 35
III.1 Raisonnement par récurrence sur $\mathbb{N}$ 36
III.1.1 Premier principe d'induction 36
III.1.2 Deuxième principe d'induction 38
III.2 Définitions inductives et preuves par induction structurelle 40
III.2.1 Ensembles définis inductivement 40
III.2.2 Preuves par induction 43
III.3 Les termes 45
III.3.1 Définition 45
III.3.2 Interprétations des termes 46
III.3.3 Définitions non ambiguës 48
III.3.4 Fonctions définies inductivement 48
III.4 Les opérations de clôture 52

IV Algèbres de Boole 57
IV.1 Les algèbres de Boole 57
IV.1.1 Définition algébrique 58
IV.1.2 Homomorphismes 59
IV.1.3 L'algèbre de Boole minimale 60
IV.2 Les anneaux de Boole 61
IV.2.1 Le "ou" exclusif 61
IV.2.2 Les anneaux de Boole 62
IV.3 Les fonctions booléennes 64
IV.3.1 Forme polynomiale des fonctions booléennes 64
IV.3.2 Fonctions duales 66

V Logique 67
V.1 Remarques sur le raisonnement mathématique 68
V.1.1 Quelques faits utiles à connaître 68
V.1.2 Quelques confusions regrettables à éviter 69
V.1.3 Calcul propositionnel *versus* calcul des prédicats 69
V.2 Calcul propositionnel 70
V.2.1 La syntaxe : les formules 70
V.2.2 La sémantique : interprétation d'une formule 71
V.2.3 Démonstrations logiques 73

V.2.4 Syntaxe et sémantique 76
V.2.5 Autres connecteurs logiques 79
V.2.6 Systèmes déductifs 82
V.3 Calcul des prédicats du premier ordre 83
V.3.1 La syntaxe : Formules du premier ordre 83
V.3.2 Sémantique : interprétation des formules 86
V.3.3 Un formulaire 91
V.3.4 Variants lexicaux 92
V.3.5 Formules prénexes 93
V.4 Théorème de Herbrand et conséquences 94
V.4.1 Théories et Modèles 94
V.4.2 Modèles de Herbrand 97
V.4.3 Théorème de Herbrand 99
V.4.4 Skolemisation 101
V.4.5 Clauses de Horn 102

VI Algèbre combinatoire et applications 107
VI.1 Rappels 107
VI.1.1 Généralités 107
VI.1.2 Applications 110
VI.2 Applications : comptage des ensembles finis 112
VI.2.1 Rappels 112
VI.2.2 Formules d'exclusion-inclusion et applications 113
VI.3 Compléments 117

VII Suites récurrentes 121
VII.1 Introduction : exemples, généralités 122
VII.1.1 Exemples 122
VII.1.2 Généralités, classification 125
VII.2 Récurrences linéaires 128
VII.2.1 Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants 128
VII.2.2 Récurrences linéaires non homogènes à coefficients constants 134
VII.2.3 Récurrences linéaires à coefficients variables 140
VII.3 Autres cas de relations de récurrence 141
VII.3.1 Récurrences de partition et changement de variable 141
VII.3.2 Transformation de l'image 142
VII.3.3 Récurrences complètes 142
VII.4 Compléments et exemples 142
VII.4.1 Opérations sur les suites 142
VII.4.2 Applications : dénombrements, nombres de Stirling 144

VIII Séries génératrices 147
VIII.1 Généralités 148
VIII.1.1 Intuitions 148
VIII.1.2 Définitions 151
VIII.1.3 Opérations sur les séries 154
VIII.1.4 Séries génératrices exponentielles 155
VIII.1.5 Décomposition en éléments simples 156
VIII.2 Applications des séries génératrices aux suites récurrentes 159
VIII.2.1 Récurrences linéaires à coefficients constants 159
VIII.2.2 Récurrences linéaires non homogènes à coefficients constants 161
VIII.2.3 Partages d'entiers 162
VIII.2.4 Récurrences linéaires d'ordre fini à coefficients variables 163
VIII.2.5 Récurrences complètes 164
VIII.2.6 Analyse en moyenne d'algorithmes 166

IX Comportements asymptotiques 168
IX.1 Généralités 170
IX.1.1 Définitions 170
IX.1.2 Opérations sur les ordres de grandeur 171
IX.2 Critères de comportement asymptotique des fonctions 173
IX.2.1 Une condition suffisante 173
IX.2.2 Echelles de comparaison 176
IX.2.3 Développements asymptotiques 176
IX.2.4 Approximations asymptotiques par des sommes partielles 178
IX.2.5 Le "bootstrapping" ou reboutement 179

X Graphes et arbres 181
X.1 Les graphes 181
X.1.1 Définitions 181
X.1.2 Graphes isomorphes 183
X.1.3 Graphes simples 183
X.1.4 Sous-graphes et graphes partiels 184
X.1.5 Degré d'un sommet 184
X.1.6 Chemins 186
X.1.7 Connexité 189
X.1.8 Exemple historique : Les sept ponts de Königsberg 190
X.1.9 Coloration d'un graphe 193
X.1.10 Graphes planaires 193
X.2 Arbres et arborescences 194
X.2.1 Les arbres 194
X.2.2 Les arborescences 197

X.2.3 Arborescences dessinées 199

XI Langages rationnels et automates finis 201
XI.1 Le monoïde libre 202
XI.2 Langages rationnels 204
XI.3 Les automates finis 206
XI.3.1 Systèmes de transitions étiquetés 206
XI.3.2 Complétion d'un automate 209
XI.3.3 Déterminisation d'un automate 209
XI.3.4 Automates minimaux 212
XI.3.5 Opérations sur les automates 216
XI.4 Systèmes d'équations 217

XII Probabilités discrètes 223
XII.1 Généralités 224
XII.1.1 Problématique et terminologie 224
XII.1.2 Espace des épreuves 224
XII.1.3 Evénements 225
XII.1.4 Relations entre événements 225
XII.2 Espaces de probabilités 226
XII.2.1 Espace probabilisable 226
XII.2.2 Espace de probabilités 227
XII.3 Probabilités conditionnelles et événements indépendants 229
XII.3.1 Intuition 230
XII.3.2 Définitions 230
XII.3.3 Formule de Bayes 232
XII.3.4 Evénements indépendants 234
XII.3.5 Probabilités produits 236
XII.4 Variables aléatoires 238
XII.4.1 Définitions 238
XII.4.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 241
XII.4.3 Application aux approximations 246
XII.5 Fonctions génératrices 248
XII.6 Lois usuelles 250
XII.6.1 Loi de Bernoulli 250
XII.6.2 Loi binomiale 251
XII.6.3 Loi géométrique 252
XII.6.4 Loi hypergéométrique 253
XII.6.5 Loi de Poisson 254
XII.6.6 Loi uniforme 255

XIII Chaines de Markov finies 257
XIII.1 Introduction 258
XIII.2 Généralités 259
XIII.2.1 Définitions 259
XIII.2.2 Exemples 260
XIII.2.3 Matrices de transition 261
XIII.2.4 Propriétés 262
XIII.3 Classification des états 264
XIII.3.1 Chaînes irréductibles 264
XIII.3.2 Classification des états 265
XIII.3.3 Graphe d'une chaîne de Markov finie 269
XIII.3.4 Probabilités et temps moyen d'absorption 272

XIV Applications et exemples 275
XIV.1 Quicksort 276
XIV.1.1 Quicksort 276
XIV.1.2 Complexité la pire de Quicksort en nombre de comparaisons 278
XIV.1.3 Complexité moyenne de Quicksort en nombre de comparaisons 279
XIV.2 L'algorithme d'Euclide 283
XIV.2.1 L'algorithme d'Euclide 283
XIV.2.2 Complexité de l'algorithme d'Euclide dans le pire cas 284
XIV.2.3 Le calcul des nombres de Fibonacci 286
XIV.3 Preuves de propriétés et de terminaison de programme 288

XV Solutions des exercices 297
Chapitre I 297
Chapitre II 306
Chapitre III 310
Chapitre IV 318
Chapitre V 322
Chapitre VI 330
Chapitre VII 336
Chapitre VIII 341
Chapitre IX 349
Chapitre X 352
Chapitre XI 357
Chapitre XII 365
Chapitre XIII 379
Chapitre XIV 388

Index 393