HOLOÏDES FACTORIELS

JEAN-ÉRIC PIN

RÉSUMÉ. Let H be a commutative monoid and suppose that the relation *divide* is an order on H. Then we say that H is a *holoid* and write $\leqslant$ for the relation *divide* : $a \leqslant b$ if and only if there exists $x \in H$ such that $ax = b$.

Dubreil, Fuchs, Mitsch and Bosbach studied certain holoids in which every element has a unique factorization (possibly reduced) into irreducible, prime or maximal elements. We give a specific meaning to the words *reduction* and *reduced*. Then we study a new family of holoids, called *factorial* — a concept which generalizes the previous holoids with *unique factorization* —. The most meaningful difference is taht we don't suppose any chain condition. However, we have again the good properties of these holoids : existence of l.c.m., existence if a minimum solution to the equation $ax = b$ in case $a \leqslant b$ ad we prove the following result : if H is factorial, it is factorial too with respect of l.c.m. as a law of composition.

Introduction

Un monoïde commutatif H dans lequel la relation "divise" est une relation d'ordre est appelé un holoïde (cf Bosbach [1], Dubreil-Jacotin, Lesieur and Croisot [4]). On notera dans ce cas $\leqslant$ la relation "divise" :

$$a \leqslant b \iff \text{il existe } x \in H \text{ tel que } ax = b$$

Bosbach, Dubreil, Fuchs et Mitsch ont étudié certains demi-groupes (non nécessairement commutatifs) dans lesquels tout élément possède une décomposition unique — éventuellement *réduite* — en produit de facteurs irréductibles, premiers ou maximaux, cf [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Nous donnons une signification précise aux mots *réduction* et *irréductible*, puis nous étudions un nouveau type d'holoïdes — dits *factoriels* — notion qui généralise les holoïdes à *décomposition unique* déjà connus. Ces holoïdes factoriels ne vérifient a priori *aucune condition de chaîne* ni de règle de simplification. Nous retrouvons néanmoins en partie les "bonnes" propriétés de ces holoïdes : existence du ppcm, existence d'une solution minimum à l'équation $ax = b$ dans le cas $a \leqslant b$ (notion proche mais plus faible que celle de résidule (Dubreil) ou de quotient (Fuchs)), caractérisation des diviseurs d'un élément et enfin le résultat suivant : si H est factoriel, alors H est factoriel pour la loi $\vee$ (ppcm).

Notations. Soit H un holoïde de neutre e. On notera $\leqslant$ la relation divise et $a < b$ si $a \leqslant b$ et $a \neq b$.

— Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie, on note $\prod_{i\in I} x_i$ le produit des x_i. En particulier $\prod_{i\in\emptyset} x_i = e$.

— S'il existe un plus petit majorant m (au sens de la relation $\leqslant$) de la famille $(x_i)_{i\in I}$, m est appelé le plus petit commun multiple (en abrégé ppcm) de $(x_i)_{i\in I}$.

— S'il existe un plus grand minorant d, d est appelé pgcd de la famille $(x_i)_{i\in I}$. A quelques nuances près, on arepris la terminologie de Bosbach [1, 2].

Article publié dans *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **12** (1977) 169–184. Cette version corrige quelques fautes de style et de typographie.

1. Le concept de réduction

Soit H un holoïde de neutre e. I désigne un ensemble fini.

Definition 1. On dit que x est *irréductible* si pour tout I fini,

$$x = \prod_{i \in I} x_i \implies \exists i \in I \; x_i = x$$

Definition 2. On dit que x est *premier* si pour tout I fini,

$$x \leqslant \prod_{i \in I} x_i \implies \exists i \in I \; x_i \leqslant x$$

Exemple 1. e n'est pas irréductible car $e = \prod_{i \in \emptyset} x_i$.

Exemple 2. Dans le $\vee$-demi-treillis de la figure 1, les éléments 1, p, q et r sont irréductibles ; p et q sont premiers mais r ne l'est pas.

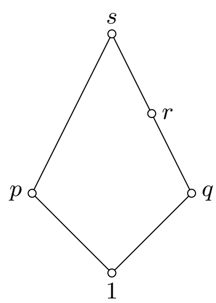

Figure 1

Remarque 1. On déduit immédiatement de la définition que tout élément premier est irréductible. Mais la réciproque est en général inexacte (cf Example 2).

Examinons quelques propriétés élémentaires des irréductibles (cf. Bosbach [1])

(1) Proposition. *Si x est irréductible et si $a < x$ alors $ax = x$.*

Démonstration. En effet, si $a < x$ il existe b tel que $x = ab$. Comme $x \neq a$, $x = b$. D'où $ax = x$. □

(2) Proposition. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *x est irréductible,*
(2) *pour tout I fini, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$*

$$(\forall i \in I \; x_i < x) \implies \prod_{i \in I} x_i < x$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (1). □

Definition 3. On appelle *décomposition* de x une famille $D = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments irréductibles dont le produit est x.

On utilisera, suivant le contexte, l'une des notations suivantes poour désigner une décomposition D de x :

$$x = \prod_{i \in I} x_i, \quad x = \prod_{D}, \quad x = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x)}$$

Seule la dernière notation demande des explications. L'ensemble indexant $\mathscr{I}$ est l'ensemble des irréductibles de H et $n_y(x)$ est le nombre d'éléments de D égaux à y. On utilise parfois une notation de ce genre pour écrire la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

Soient D et D' deux décompositions de x. On dit que D est *équivalente* à D' et on note $D \sim D'$ si D et D' ont les mêmes facteurs. Formellement,

$$D = (x_i)_{i \in I} \sim D' = (x'_i)_{i \in I'}$$

si et seulement si il existe une bijection σ de I vers I' telle que pour tout $i \in I$, $x_i = x'_{\sigma(i)}$.

Nous arrivons aux deux définitions les plus importantes.

Definition 4. Soient $D = (x_i)_{i \in I}$ et $D' = (x'_i)_{i \in I'}$ deux décompositions de x. On dit que D est *plus réduite* que D' et on note $D \preccurlyeq D'$ s'il existe une injection σ de I vers I' telle que pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant x'_{\sigma(i)}$. On dit dans ce cas que σ est une *injection de réduction.*

Par abus de notation, on notera parfois $\sigma(x_i)$ au lieu de $x'_{\sigma(x_i)}$. On voit facilement que $\leqslant$ est une relation de préordre sur l'ensemble des décompositions de x.

Definition 5. On dit que H est *factoriel* lorsque pour tout élément x de H, l'ensemble des décompositions de x a un élément *minimum* qu'on appelle *décomposition réduite* de x.

N.B. Cette notion généralise les holoïdes "halbprimkanonisch" de Bosbach et les "primfaktorzerlegungen" de Fuchs.

Le résultat suivant éclaire la définition 5.

(3) Proposition. *On a $D \sim D'$ si et seulement si $D \preccurlyeq D'$ et $D' \preccurlyeq D$.*

Démonstration. En effet, si $D \sim D'$, il est clair que $D \preccurlyeq D'$ et $D' \preccurlyeq D$. Réciproquement supposons que $D = (x_i)_{i \in I} \preccurlyeq D' = (x'_i)_{i \in I'}$ et $D' \preccurlyeq D$. Il existe alors des injections de réduction $\sigma : I \to I'$ et $\sigma' : I' \to I$. Comme I et I' sont finis, σ et σ' sont bijectives et on a, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant x'_{\sigma(i)} \leqslant x_{\sigma' \circ \sigma(i)}$. Posons $\tau = \sigma' \circ \sigma$ et supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} < x_{\tau(i_0)}$. Puisque τ est bijective, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\tau^n(i_0) = i_0$ et donc $x_{i_0} < x_{\tau(i_0)} \leqslant \cdots \leqslant x_{\tau^n(i_0)} = x_{i_0}$. Contradiction. Donc $x_i = x'_{\sigma(i)} = x_{\tau(i)}$ pour tout $i \in I$ et $D \sim D'$. □

Remarque 2. Soit $x = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ une décomposition réduite de x. Soient $y_0 < y$ deux irréductibles. Alors $n_{y_0}(x) = 0$ ou $n_y(x) = 0$. Autrement dit deux irréductibles distincts et comparables ne peuvent figurer simultanément dans une décomposition réduite.

Il résulte de [3] que deux décompositions réduites de x ont les mêmes facteurs à l'ordre près. Dans un holoïde factoriel on parlera donc de *la* décomposition réduite d'un élément (qui n'est définie qu'à l'ordre près des facteurs).

Voici un critère permettant de comparer deux décompositions mises sous forme exponentielle.

(4) Théorème. *Pour que $D = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ soit plus réduite que $D' = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(b)}$, il faut et il suffit que, pour tout partie H de $\mathscr{I}$, on ait*

$$\sum_{y \in H} n_y(a) \leqslant \sum_{\substack{y' \geqslant y \\ y \in H}} n'_y(b)$$

Démonstration. Cela résulte du lemme des mariages. Soit A l'application de I dans $\mathcal{P}(I')$ définie par $A(i) = \{j \mid x_i \leqslant x'_j\}$. Alors $D \preccurlyeq D'$ si et seulement si il existe une injection $\sigma : I \to I'$ telle que, pour tout $i \in I$, $\sigma(i) \in A(i)$.

D'après le lemme des mariages, il faut et il suffit que, pour toute partie K de I,

$$\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{i\in K} A(i)\Big) \geqslant \mathrm{Card}(K)$$

Posons

$$\overline{K} = \{i \in I \mid \text{il existe } j \in K \text{ tel que } x_i = x_j\}.$$

Il est clair que $\mathrm{Card}(\overline{K}) \geqslant \mathrm{Card}(K)$ et que $\mathrm{Card}(\bigcup_{i\in K} A(i)) = \mathrm{Card}(\bigcup_{i\in\overline{K}} A(i))$. Donc $D \preccurlyeq D'$ si et seulement si pour toute partie K de I, $\mathrm{Card}(\bigcup_{i\in\overline{K}} A(i)) \geqslant \mathrm{Card}(\overline{K})$ ce qui n'est rien d'autre qu'une formulation différente du théorème. □

Ce théorème permettrait de démontrer par le calcul certains des énoncés des sections 2, 3, 4 et 5. Donnons tout de suite un résultat simple, mais utile :

(5) Proposition. *Soit $x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ une décomposition réduite de x. Alors toute décomposition $a = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ — avec, pour tout $y \in \mathscr{I}$, $n_y(a) \leqslant n_y(x)$ — est une décomposition réduite de a.*

Démonstration. La démonstration est immédiate. □

Nous allons maintenant donner une caractérisation des décompositions réduites. Pour cela, nous aurons besoin de la proposition suivante :

(6) Proposition. *Si $D = (x_i)_{i\in I}$ est la décomposition réduite de x, si $D' = (x'_i)_{i\in I'}$ est une décomposition quelconque de x, il existe une injection de réduction σ de D dans D' telle que $x'_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(j)}$ entraine $x_i = x_j$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\mathrm{Card}(D') = n$. C'est évident pour $n = 0$ ou 1. Supposons le résultat acquis jusqu'à $n-1$. Soit σ une injection de réduite de D dans D' et supposons que $x'_{\sigma(i_1)} = x'_{\sigma(i_2)}$ avec $x_{i_1} \neq x_{i_2}$. Puisque D est réduite, x_{i_1} et x_{i_2} sont incomparables (cf. Remarque 2) et donc $x_{i_1} < x'_{\sigma(i_1)}$, $x_{i_2} < x'_{\sigma(i_2)} = x'_{\sigma(i_1)}$, d'où $x_{i_1}x_{i_2} < x'_{\sigma(i_1)}$ d'après (2). On a donc

$$x = \prod_{i\in I} x_i = x_{i_1}x_{i_2} \prod_{i\in I-\{i_1,i_2\}} x_i \leqslant x'_{\sigma(i_1)} \prod_{i\in I-\{i_1,i_2\}} x'_{\sigma(i)} = \prod_{i\in I-\{i_2\}} x'_{\sigma(i)} \leqslant x$$

et $D' - \{x'_{\sigma(i_2)}\}$ est encore une décomposition de x. Or $\mathrm{Card}(D' - \{x'_{\sigma(i_2)}\}) = n-1$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure facilement. □

Avant d'énoncer le théorème, précisons une terminologie : si σ est une injection de réduction de $D = (x_i)_{i\in I}$ dans $D' = (x'_i)_{i\in I'}$, on appelle *image dans $\mathscr{I}$ de σ* le sous-ensemble $\{x'_{\sigma(i)} \mid i \in I\}$ de $\mathscr{I}$.

(7) Théorème. (Caractérisation des décompositions réduites.) *Pour que*

$$x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)} = D$$

soit la décomposition réduite de x, il faut et il suffit que pour toute décomposition D' de x, il existe, pour chaque $y \in \mathscr{I}$, des injections de réduction σ_y de $y^{n_y(x)}$ dans D', d'images dans $\mathscr{I}$ deux à deux disjointes.

Démonstration. La condition est suffisante : on peut construire une injection de réduction de D dans D' en "recollant" les σ_y.

La condition est nécessaire : d'après (6), il existe une injection de réduction σ de D dans D' telle que

$$(\alpha) \qquad x'_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(j)} \implies x_i = x_j$$

Pour chaque $y \in \mathscr{I}$, σ induit une injection de réduction σ_y de $y^{n_y(x)}$ dans D'. Les images des σ_y dans $\mathscr{I}$ sont deux à deux disjointes d'après (α). □

Ce résultat nous sera très utile dans la Section 4 pour la démonstration du théorème fondamental (27).

Avant de terminer cette section, donnons une exemple d'holoïde factoriel. Il s'agit du $\vee$-demi-treillis de la Figure 2 ci-dessous. Les éléments irréductibles sont a, b, les x_n et les y_n. Il n'y a que deux éléments premiers : a et y_1. En effet y_2, par exemple, n'est pas premier car $y_2 \leqslant ay_1 = x$ mais $y_2 \nleqslant a$ et $y_2 \nleqslant y_1$. La décomposition réduite de x est $x = ay_1$. Les éléments minimaux sont a et y_1.

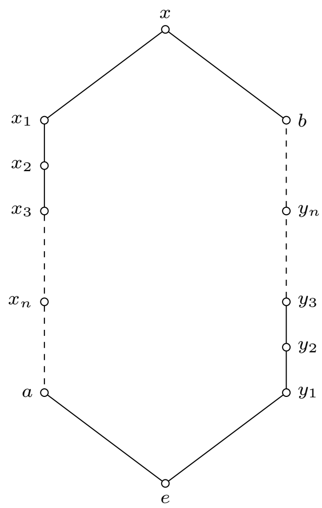

Figure 2

Cet holoïde ne vérifie ni la condition de chaîne ascendante, ni la condition de chaîne descendante : c'est là une différence essentielle avec les holoïdes étudiés par Bosbach ou avec les demi-groupes à décomposition unique en facteurs premiers de Fuchs et Dubreil-Jacotin.

2. Diviseurs d'un élément dans un holoïde factoriel

En voici une première caractérisation :

(8) Théorème. (Première caractérisation des diviseurs d'un élément.) *Soit un holoïde factoriel. Soit $x \leqslant z$ et $z = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(z)}$ la décomposition réduite de z. Alors $x = x_1x_2$ où x_1 est absorbé par z et où x_2 admet une décomposition réduite de la forme $x_2 = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x_2)}$ avec, pour tout $y \in \mathscr{I}$, $n_y(x_2) \leqslant n_y(z)$.*

Démonstration. Soit $x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)} = D_1$ une décomposition de x. Posons

$$\begin{cases} x_1 = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x_1)}, \\ x_2 = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x_2)}, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} n_y(x_1) = (n_y(x) - n_y(z))^+, \\ n_y(x_2) = \inf(n_y(x), n_y(z)). \end{cases}$$

En vertu de (5), x_2 vérifie bien les conditions de l'énoncé. De plus $x_1x_2 = x$. Reste à montrer que $x_1z = z$. Soit a tel que $ax = z$ et soit $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)} = D_2$ une décomposition de a. On a :

$$\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(z)} = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)+n_y(x)} = \prod_{D_1 \dot\cup D_2}$$

où $D_1 \dot\cup D_2$ désigne l'union disjointe des familles D_1 et D_2.

Mais puisque $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ est réduite, il existe une injection de réduction σ de $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ dans $\prod_{D_1\dot\cup D_2} = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)+n_y(x)}$. Posons

$$z_1 = \prod_{\sigma^{-1}(D_2)}, \quad z_2 = \prod_{\sigma^{-1}(D_1)\cap\{y|\sigma(y)=y\}}, \quad z_3 = \prod_{\sigma^{-1}(D_1)\cap\{y|\sigma(y)>y\}}.$$

On a

$$z \leqslant zx_1 = z\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{[n_y(x)-n_y(z)]^+} \leqslant z\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{(n_y(x)-n_y(z_2))}.$$

En effet, $n_y(z_2) \leqslant n_y(z)$ et donc

$$[n_y(x) - n_y(z)]^+ \leqslant [n_y(x) - n_y(z_2)]^+ = n_y(x) - n_y(z_2)$$

car $n_y(x) \geqslant n_y(z_2)$. Comme $z = z_1z_2z_3$, on obtient

$$z \leqslant z_1z_2z_3\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{(n_y(x)-n_y(z_2))}$$

Or d'après (1), z_3 est absorbé par $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{(n_y(x)-n_y(z_2))}$. Donc

$$z \leqslant z_1x \leqslant z_1z_2\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{(n_y(x)-n_y(z_2))} \leqslant z_1x \leqslant ax = z$$

Donc $zx_1 = z$. □

Voici quelques conséquences de ce théorème.

(9) Corollaire. *Soit y_0 un irréductible et soit $z = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ la décomposition réduite de z. On suppose que $y_0^m \leqslant z$. Alors $m \leqslant n_{y_0}(z)$ ou bien z absorbe y_0.*

Démonstration. Reprenons la démonstration de (8) avec $x = y_0^m$. Si $m > n_{y_0}(z)$, alors $x_1 = y_0^{m-n_{y_0}(z)}$ est absorbé par z ; donc y_0 et par conséquent y_0^m sont absorbés par z. □

(10) Corollaire. *Soit $a = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ une décomposition de a (pas nécessairement réduite). Pour montrer que $a \leqslant x$, il suffit de montrer que $y^{n_y(a)} \leqslant x$ pour tout $y \in \mathscr{I}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (9). □

Citons encore un corollaire qui situe bien la différence entre éléments irréductible et premier.

(11) Corollaire. *Soit y_0 un irréductible. Si $y_0 \leqslant ab$, alors $y_0 \leqslant a$, $y_0 \leqslant b$ ou y_0 est absorbé par ab.*

Démonstration. Soient

$$ab = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(ab)}, \quad a = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}, \quad b = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(b)}$$

les décompositions réduites de ab, a et b respectivement. D'après (9), ou bien y_0 est absorbé par ab, ou bien $n_{y_0}(ab) \geqslant 1$. Plaçons-nous dans ce dernier cas : alors $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(ab)}$ est plus réduite que $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{(n_y(a)+n_y(b))}$. D'après (4) appliqué à $H = \{y_0\}$, on a

$$1 \leqslant n_{y_0}(ab) \leqslant \sum_{y\geqslant y_0} n_y(a) + n_y(b)$$

Donc $\sum_{y\geqslant y_0} n_y(a) \geqslant 1$ ou $\sum_{y\geqslant y_0} n_y(b) \geqslant 1$ et $y_0 \leqslant a$ ou $y_0 \leqslant b$. □

Enfin on a le

(12) Corollaire. *Soient y_1 et y_2 deux irréductibles. Si $y_1^{n_1} = y_2^{n_2}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$), alors $y_1 = y_2$.*

Démonstration. En effet soit $z = y_1^{n_1} = y_2^{n_2}$ et D la décomposition réduite de z. Supposons $y_1 \neq y_2$. De (10) on déduit alors $y_1^{n_1} y_2^{n_2} \leqslant z$, d'où $y_1 z = z$ et $y_2 z = z$ et par conséquent ni y_1 ni y_2 ne figurent dans D. Soit σ l'injection de réduction de D dans $y_1^{n_1}$. Pour tout $x \in D$, on a $x \leqslant \sigma(x) = y_1$ donc $x < y_1$ (puisque y_1 ne figure pas dans D). On en déduit d'après (2) $z = \prod_D < y_1 \leqslant y_1^{n_1} = z$. Contradiction. Donc $y_1 = y_2$. □

3. Associés minima

Nous introduisons maintenant une notion proche — *mais distincte* comme on va le voir — de la notion de « quotient » (Fuchs [5]) ou de « résiduel » (Dubreil [4]). La terminologie est due à Bosbach [2].

Definition 6. Soit $x \leqslant z$ et soit A l'ensemble des a tels que $ax = z$ (appelés associés de x dans z). On appelle *associé minimum de x dans z* un élément minimum de A relativement à $\leqslant$. Si cet élément existe on le note $z : x$.

Si a est le « quotient » (au sens de Fuchs) de z par x alors on a l'équivalence $a \leqslant t \iff z \leqslant xt$. On en déduit facilement que a est l'associé minimum de x dans z mais *la réciproque n'est pas vraie* ainsi que le montre l'exemple 2 : r est l'associé minimum de q dans r, $r \leqslant qp$ mais $q \nleqslant p$.

On sait (Dubreil [4] partie 2 chap. 5, Fuchs [5] chap. 12), que dans un holoïde à décomposition en facteurs premiers (mit eindeutigen Primfaktorzerlegungen) il esiste des résiduels (Quotienten). Voici un résultat analogue pour les holoïdes factoriels.

(13) Théorème. *Soit H un holoïde factoriel. Soit $x \leqslant z$ et $x = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x)}$, $z = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z)}$ les décompositions réduites de x et z. Alors $z : x$ existe et sa décomposition réduite est $\prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z:x)}$ avec $n_{y_0}(z : x) = 0$ s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, $n_{y_0}(z : x) = \big(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\big)^+$ sinon.*

Démonstration. Posons $x' = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x')}$ avec $n_{y_0}(x') = 0$ s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, $n_{y_0}(x') = \big(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\big)^+$ sinon. On va montrer $z \leqslant xx'$, puis $xx' \leqslant z$ et enfin $x' = z : x$.
a) $z \leqslant xx'$.

D'après (10) il suffit de montrer que, pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$, $y_0^{n_{y_0}(z)} \leqslant xx'$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, y_0 est absorbé par x d'après (1) donc par xx' et c'est démontré.

— Sinon $n_{y_0}(x') = \big(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\big)^+$ et $n_{y_0}(z) \leqslant n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x')$ donc $y_0^{n_{y_0}(z)} \leqslant xx'$.
b) $xx' \leqslant z$.
D'après (10) il suffit de prouver que, pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$, $y_0^{n_{y_0}(x)+n_{y_0}(x')} \leqslant z$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$, alors $n_{y_0}(x') = 0$ et $n_{y_0}(x) = 0$ d'après la remarque suivant (3). Donc $0 = n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x') \leqslant n_{y_0}(z)$.

— Sinon $n_{y_0}(x') = \big(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\big)^+$ d'où $n_{y_0}(x) + n_{y_0}(x') = \max\big(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\big)$. Si $n_{y_0}(x) \leqslant n_{y_0}(z)$ c'est terminé et si $n_{y_0}(x) > n_{y_0}(z)$, (11) appliqué à l'inégalité $y_0^{n_{y_0}(x)} \leqslant z$ montre que y_0 est absorbé par z et donc $y_0^{n_{y_0}(x)+n_{y_0}(x')} \leqslant z$. D'où $xx' = z$.
c) $x' = z : x$
Supposons que $ax = z$ et soit $a = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ la décomposition réduite de a. Il s'agit de montrer que $x' \leqslant a$. Là encore il suffira de prouver que $y_0^{n_{y_0}(x')} \leqslant a$ pour

tout $y_0 \in \mathscr{I}$. Le seul cas à étudier est celui où $n_{y_0}(x') > 0$: on a donc $\sum_{y>y_0} n_y(x) = 0$. Appliquons (4) avec $H = \{y_0\}$ à $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(z)} \preccurlyeq \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)+n_y(a)}$. Il vient :

$$n_{y_0}(z) \leqslant \sum_{y\geqslant y_0} \big(n_y(a) + n_y(x)\big) = n_{y_0}(x) + \sum_{y\geqslant y_0} n_y(a).$$

D'où

$$n_{y_0}(x') = \big(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\big)^+ \leqslant \sum_{y\geqslant y_0} n_y(a).$$

D'après (4), $y_0^{n_{y_0}(x')} \preccurlyeq \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ et donc $y_0^{n_{y_0}(x')} \leqslant a$.

Enfin, la décomposition de x' est réduite, d'après (5). □

Remarque 3. Les résultats suivants sont faux en général :

- — $(ax : x) = a$; prendre $a = x = x^2 \neq e$, $x^2 : x = x : x = e$.
- — Si $(x : a) = b$, alors $(x : b) = a$. Dans l'exemple 2, $s : r = p$, mais $s : p = q$.
- — $z(y : x) = zy : x$. Dans l'exemple 2, $r(p : p) = r$, $rp : p = s : p = q$ (cependant on a toujours $z(y : x) \geqslant zy : x$).
- — $(a : x_1x_2) = (a : x_1) : x_2 = (a : x_2) : x_1$ (prendre $a = a^2 = x_1 = x_2$). Le premier membre existe, mais ni le second, ni le troisième n'ont de sens.
- — $x \leqslant a \leqslant b$, alors $(a : x) \leqslant (b : x)$. Considérons en effet le $\vee$-demi-treillis repésenté par la Figure 3. On a $a \leqslant ap \leqslant s$, $ap : a = p$, $s : a = b$, mais p et b sont incomparables.

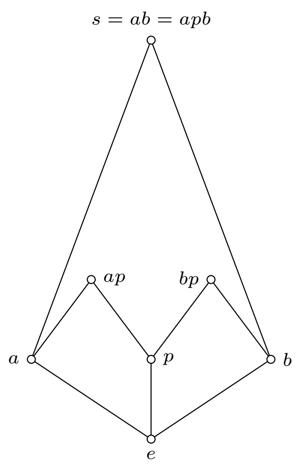

FIGURE 3

En revanche, on a le résultat suivant :

(14) PROPOSITION. *Si $a \leqslant b \leqslant x$, alors $(x : b) \leqslant (x : a)$.*

Démonstration. Soient

$$x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}, \quad a = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}, \quad b = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(b)}$$

les décompositions réduites de x, a et b respectivement. D'après (10), il suffit de prouver que pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$, $y_0^{n_{y_0}(x:b)} \leqslant x : a$. D'après (13), le seul cas où $n_{y_0}(x : b) \neq 0$ est celui où

$$\sum_{y>y_0} n_y(b) = 0, \quad n_{y_0}(x) > n_{y_0}(b).$$

Dans ce cas, b n'absorbe pas y_0 car sinon on aurait

$$b(x:b) = x = b \prod_{\substack{y\in\mathscr{I}\\ y\neq y_0}} y^{n_y(x:b)} \text{ d'où } n_{y_0}(x:b) = 0$$

Par conséquent y_0 n'est pas absorbé par b — ni par a — et $\sum_{y>y_0} n_y(a) = 0$. (9), appliqué à l'inégalité $y_0^{n_{y_0}(a)} \leqslant b$ montre que $n_{y_0}(a) \leqslant n_{y_0}(b)$. Il vient alors :

$$0 < n_{y_0}(x) - n_{y_0}(b) \leqslant n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a) \leqslant \big(n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a)\big)^+.$$

Comme $\sum_{y>y_0} n_y(a) = 0$, $n_{y_0}(x:a) = \big(n_{y_0}(x) - n_{y_0}(a)\big)^+$. On a donc montré que $n_{y_0}(x:b) \leqslant n_{y_0}(x:a)$ ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant caractériser les associés minima des différents diviseurs de z, qu'on appelle également *diviseurs minima* de z.

(15) Proposition. *Soit $z = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(z)}$ la décomposition réduite de z. Les diviseurs minima de z sont les éléments a dont la décomposition réduite est de la forme $a = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(a)}$ avec $n_y(a) \leqslant n_y(z)$ pour tout $y \in \mathscr{I}$.*

Démonstration. D'après (13) les diviseurs minima sont tous de cette forme. Réciproquement, soit a un élément de la forme indiquée ci-dessus. Posons

$$x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)} \quad \text{avec} \quad n_y(x) = n_y(z) - n_y(a).$$

Il est clair que $x \leqslant z$. On va montrer que $z : x = a$. Soit $y_0 \in \mathcal{I}$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(z) > 0$, alors $n_{y_0}(z) = 0$ d'après la remarque suivant (3) et $n_{y_0}(a) = 0$ d'après l'hypothèse. Donc $n_{y_0}(z:x) = 0 = n_{y_0}(a)$.

— Sinon

$$n_{y_0}(z:x) = \big[n_{y_0}(z) - [n_{y_0}(z) - n_{y_0}(a)]\big]^+ = n_{y_0}(a)$$

On conclut à l'aide de (10). □

De (8) et (15) on déduit la seconde caractérisation des diviseurs d'un élément.

(16) Théorème. *Soit $z \in H$. Tout diviseur de z est produit d'un diviseur minimum de z et d'un élément absorbé par z. Réciproquement tout élément qui se factorise de cette manière est un diviseur de z.*

4. P.P.C.M.

On notera $\bigvee_{i=1}^n x_i$ le plus petit commun multiple (p.p.c.m.) d'une famille d'éléments $(x_i)_{i=1}^n$ — s'il existe. — On sait (cf. Dubreil [4] et Fuchs [5]) que dans un holoïde à décomposition en facteurs premiers unique le p.p.c.m. existe. Comme on va le voir, ce résultat est conservé dans les holoïdes factoriels.

(17) Théorème. *Soit $(x_i)_{i=1}^m$ une famille finie d'éléments d'un holoïde factoriel H. Soit $x_i = \prod_{y\in\mathcal{I}} y^{n_y(x_i)}$ une décomposition — pas nécessairement réduite — de x_i. Alors le p.p.c.m. des $(x_i)_{i=1}^m$ existe et on a :*

$$\bigvee_{i=1}^n x_i = \prod_{y\in\mathcal{I}} y^{\max_{i=1}^m y^{n_y(x_i)}}$$

(décomposition non réduite en genéral).

Démonstration. Posons $z = \prod_{y\in\mathcal{I}} y^{\max_{i=1}^m y^{n_y(x_i)}}$. Il est clair que $x_i \leqslant z$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Réciproquement soit $a \geqslant x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et soit $a = \prod_{y\in\mathcal{I}} y^{n_y(a)}$ la décomposition réduite de a. Soit $y_0 \in \mathcal{I}$. Puisque $x_i \leqslant a$, on a d'après (9) :

— Soit $n_{y_0}(x_i) \leqslant n_y(a)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et donc $\max_{i=1} n_{y_0}(x_i) \leqslant n_{y_0}(a)$.

— Soit a absorbe y_0 et donc également $y_0^{\max_{i=1}^m n_{y_0}(x_i)}$.

Dans les deux cas $y_0^{\max_{i=1}^m n_{y_0}(x_i)} \leqslant a$. Donc $z \leqslant a$ d'après (10). □

Remarque 4. En revanche deux éléments n'ont pas toujours de p.g.c.d. dans un holoïde factoriel. Considérons en effet le $\vee$-demi-treillis représenté par la figure 4 : les éléments x et y n'ont pas de p.g.c.d.

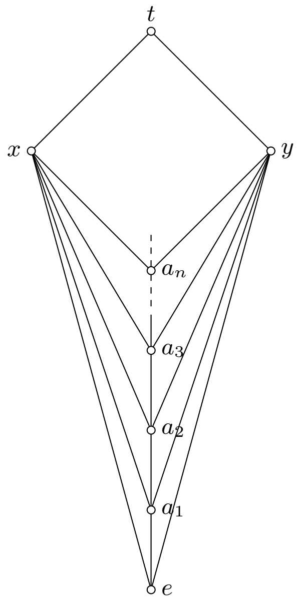

FIGURE 4

Outre les propriétés classiques (commutativité, associativité, idempotence), $\vee$ possède une propriété de distributivité.

(18) PROPOSITION. $z\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} (zx_i)$

Démonstration. Soient $z = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z)}$ et $x_i = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x_i)}$ des décompositions de z et x_i. On a :

$$z\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{(n_y(z)+\max_{i=1}^n n_y(x_i))} = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{\max_{i=1}^n (n_y(z)+n_y(x_i))} = \bigvee_{i=1}^{n} (zx_i)$$

□

Voici une autre propriété du p.p.c.m.

(19) PROPOSITION. *Si* $m = \bigvee_{i=1}^n x_i$, *alors* $m^q = \bigvee_{i=1}^n x_i^q$.

Démonstration. C'est évident à l'aide de (17). □

Nous allons maintenant examiner les relations entre p.p.c.m. et diviseurs minima : ce sera l'objet des propositions qui suivent.

(20) Proposition. *Soit* $(x_i)_{i=1}^n$ *une famille d'éléments de* H *et* m *leur p.p.c.m. Soient* $(m : x_i) = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(m:x_i)}$ *les décompositions réduites des* $m : x_i$*. Alors pour tout* $y_0 \in \mathscr{I}$*,* $\prod_{i=1}^n n_{y_0}(m : x_i) = 0$*. De plus cette condition caractérise le p.p.c.m. parmi les multiples communs aux* x_i*.*

Démonstration. On a $\prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(m)} \preccurlyeq \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{\max_{i=1}^n n_y(x_i)}$. En appliquant (4) à $H = \{y_0\}$, on obtient $n_{y_0}(m) \leqslant \sum_{y\geqslant y_0} \max_{i=1}^n n_y(x_i)$.

— S'il existe $y > y_0$ tel que $\max_{i=1}^n n_y(x_i) > 0$, il existe i_0 tel que $n_y(x_i) > 0$ et donc $n_{y_0}(m : x_i) = 0$.

— Sinon $n_{y_0}(m) \leqslant \max_{i=1}^n n_{y_0}(x_i)$. Il existe i_0 tel que $n_{y_0}(m) = n_{y_0}(x_{i_0})$ et donc $n_{y_0}(m : x_{i_0}) = 0$.

Supposons maintenant $x_i \leqslant m'$ pour tout i et $\prod_{i=1}^n n_{y_0}(m' : x_i) = 0$ pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$. Soit $m' = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(m')}$ la décomposition réduite de m'. Soit i_0 tel que $n_{y_0}(m' : x_{i_0}) = 0$.

Premier cas. Il existe $y > y_0$ avec $n_{y_0}(x_{i_0}) > 0$. Alors y_0 est absorbé par x_{i_0} et donc par m. Donc $y_0^{n_{y_0}(m')} \leqslant m$.

Deuxième cas. $\sum_{y>y_0} n_y(x_{i_0}) = 0$. Alors

$$0 = n_{y_0}(m' : x_{i_0}) = \big(n_{y_0}(m') - n_{y_0}(x_{i_0})\big)^+$$

donc

$$n_{y_0}(m') \leqslant n_{y_0}(x_{i_0}) \leqslant \max_{i=1}^n n_{y_0}(x_i) \quad \text{et} \quad y_0^{n_{y_0}(m')} \leqslant m.$$

On conclut à l'aide de (10) que $m' \leqslant m$ et donc $m' = m$ par définition du p.p.c.m. □

(21) Proposition. *Soient* x_1 *et* x_2 *des éléments de* H*,* m *leur p.p.c.m. Alors* $(m : x_1)x_1 = (m : x_2)x_2 = m$ *et* $(m : x_1) \vee (m : x_2) = (m : x_1)(m : x_2)$*.*

Démonstration. Les deux premières égalités résultent uniquement de la définition 6. La troisième égalité résulte de la Proposition (20). En effet, on a pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$, $n_{y_0}(m : x_1) = 0$ ou $n_{y_0}(m : x_2) = 0$. D'où

$$n_{y_0}(m : x_1) + n_{y_0}(m : x_2) = \max\big(n_{y_0}(m : x_1), n_{y_0}(m : x_2)\big)$$

et donc $(m : x_1)(m : x_2) = (m : x_1) \vee (m : x_2)$. □

Remarque 5. Si $x \leqslant a$ et $x \leqslant b$ on n'a pas en général $(a : x) \vee (b : x) = (a \vee b) : x$. En effet considérons le $\vee$-demi-treillis représenté par la figure 5. On a

$$a : x = z \quad \text{et} \quad b : x = y, \quad z \vee y = a \quad \text{mais} \quad (a \vee b) : x = a : x = z.$$

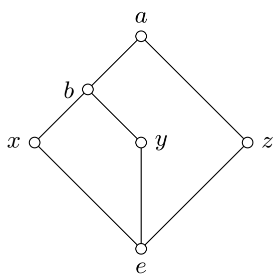

Figure 5

Nous introduisons maintenant la notion d'adjoint. C'est l'analogue du « a^Δ » de Fuchs [5, page 256]. On trouvera plus loin des propriétés voisines du « a^Δ ».

Definition 7. Soit $x \leqslant z$. On appelle *adjoint de x dans z* l'élément $\bar{x} = z : (z : x)$.

Remarquons tout d'abord ceci : $(x : z) = z$ et donc $\bar{x} = z : (z : x) \leqslant x$.
L'objet de la proposition suivante est le calcul de $\bar{x}$, $x : \bar{x}$ et $z : \bar{x}$. Soient

$$x = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x)}, \quad z = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z)}, \quad \bar{x} = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(\bar{x})},$$
$$(x : \bar{x}) = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x:\bar{x})}, \quad (z : \bar{x}) = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z:\bar{x})}$$

le décompositions réduites de x, z, $\bar{x}$, $x : \bar{x}$ et $z : \bar{x}$ respectivement.

(22) Proposition.

(a) $n_{y_0}(\bar{x}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) & \textit{s'il existe } y > y_0 \textit{ tel que } n_y(x) > 0, \\ \min\bigl(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\bigr) & \textit{sinon.} \end{cases}$

(b) $n_{y_0}(x : \bar{x}) = \bigl(n_{y_0}(x) - n_{y_0}(z)\bigr)^+$,

(c) $n_{y_0}(z : \bar{x}) = n_{y_0}(z : x)$.

Démonstration. (a) Tout d'abord supposons $n_{y_0}(z) = 0$. Alors, d'après (13), $n_{y_0}(z : x) = 0$ et $n_{y_0}(\bar{x}) = 0$. Donc (a) est vérifié.

Supposons $n_{y_0}(z) > 0$. Alors $n_y(z) = 0$ pour $y > y_0$ et donc $n_y(z : x) = 0$ pour $y > y_0$. On distingue alors deux cas.

— Il existe $y > y_0$ tel que $n_y(x) > 0$; alors $n_{y_0}(z : x) = 0$ d'après (13) et $n_{y_0}(\bar{x}) = \bigl(n_{y_0}(z) - 0\bigr)^+ = n_{y_0}(z)$ toujours d'après (13).

— $n_y(x) = 0$ pour $y > y_0$, d'où $n_{y_0}(z : x) = \bigl(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\bigr)^+$. On a alors

$$\begin{aligned} n_{y_0}(\bar{x}) &= \bigl(n_{y_0}(z) - (n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x))^+\bigr)^+ = \begin{cases} n_{y_0}(x) & \text{si } n_{y_0}(z) \geqslant n_{y_0}(x) \\ n_{y_0}(z) & \text{si } n_{y_0}(x) \geqslant n_{y_0}(z) \end{cases} \\ &= \min\bigl(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\bigr). \end{aligned}$$

(b) Si $n_{y_0}(x) = 0$ la formule est évidente.

Si $n_{y_0}(x) > 0$, alors $n_y(x) = 0$ pour $y > y_0$, donc $n_{y_0}(\bar{x}) = \min\bigl(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\bigr)$ et $n_y(\bar{x}) = 0$ pour $y > y_0$ d'après (a). Par conséquent

$$n_{y_0}(x : \bar{x}) = n_{y_0}(x) - \min\bigl(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\bigr) = \bigl(n_{y_0}(x) - n_{y_0}(z)\bigr)^+.$$

(c) Si $n_{y_0}(z) = 0$ la formule est évidente.

Si $n_{y_0}(z) > 0$, alors $n_y(z) = 0$ pour $y > y_0$ (même raisonnement qu'au (b)). On en déduit

$$\begin{aligned} n_{y_0}(z : \bar{x}) &= \bigl(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(\bar{x})\bigr)^+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(x) > 0 \\ \bigl(n_{y_0}(z) - n_{y_0}(x)\bigr)^+ & \text{sinon} \end{cases} \\ &= n_{y_0}(z : x). \end{aligned}$$

□

Remarque 6. Si x est un diviseur minimum de z, on déduit de (b) que $\bar{x} = x$.

(23) Corollaire. *Si $\bar{x}$ est l'adjoint de x dans z*

(a) $z : \bar{x} = z : x$,

(b) $x : \bar{x}$ *est absorbé par z.*

Démonstration. Le (a) résulte du (c) de (22).

Le (b) résulte du (b) de (22) et de (9) : si $n_{y_0}(x : \bar{x}) > 0$, $n_{y_0}(x) > n_{y_0}(z)$. D'après (9) appliqué à $y_0^{n_{y_0}(x)} \leqslant z$, y_0 est absorbé par z, donc $y_0^{n_{y_0}(x:\bar{x})}$ est absorbé par z. □

Remarque 7. On retrouve ainsi le théorème (16).

Voici quelques autres propriétés de $\bar{x}$.

(24) Proposition. *Si* $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = m$ *et si* $\bar{x}_i$ *est l'adjoint de* x_i *dans* m, $\bigvee_{i=1}^{n} \bar{x}_i = m$.

Démonstration. Posons $m' = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{x}_i$. Puisque $\bar{x}_i \leqslant x_i \leqslant m$, on a $m' \leqslant m$. D'autre part, $m : \bar{x}_i = m : x_i$ d'après (23), d'où $m = m'$ d'après (20). □

(25) Théorème. *Soient a et b des diviseurs de z.*

(a) $\bar{a} \leqslant a$,

(b) $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$,

(c) $a \leqslant b \implies \bar{a} \leqslant \bar{b}$,

(d) $\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a \vee b}$.

Démonstration. (a) a déjà été démontré (après la définition 7).

(b) D'après (23) on a $\bar{\bar{a}} = z : (z : \bar{a}) = z : (z : a) = \bar{a}$.

(c) D'après (14) on a

$$a \leqslant b \leqslant z \implies (z : b) \leqslant (z : a) \leqslant z \implies z : (z : a) \leqslant z : (z : b),$$

soit encore $\bar{a} \leqslant \bar{b}$.

(d) On utilise (22) pour calculer les décompositions réduites de $\overline{a \vee b}$ et $\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$. Soient

$$a = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(a)}, \quad b = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(b)}, \quad z = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z)}$$

les décompositions réduites de a, b et z respectivement. D'après (22) et (17), on a $\bar{a} \vee \bar{b} = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(\bar{a} \vee \bar{b})}$ avec

$$n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) \text{ s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(a) > 0 \text{ ou } n_y(b) > 0 \\ \max\bigl(\min(n_{y_0}(a), n_{y_0}(z)), \min(n_{y_0}(b), n_{y_0}(z))\bigr) \\ \qquad\qquad = \min\bigl(n_{y_0}(z)), \max(n_{y_0}(a), n_{y_0}(b))\bigr) \text{ sinon} \end{cases}$$

Cette décomposition est *a priori* non réduite, mais puisque pour tout $y \in \mathscr{I}$, $n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) \leqslant n_y(z)$, la décomposition est réduite d'après (5). Donc $\bar{a} \vee \bar{b}$ est un diviseur minimum de z. Soit $a = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(a \vee b)}$ la décomposition réduite de $a \vee b$. D'après (22), on a :

$$n_y(\bar{a} \vee \bar{b}) = \begin{cases} n_{y_0}(z) & \text{s'il existe } y > y_0 \text{ tel que } n_y(a \vee b) > 0 \\ \min\bigl(n_{y_0}(z), n_{y_0}(a \vee b)\bigr) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, s'il existe $y > y_0$ tel que $n_y(a \vee b) > 0$, on a $\sum_{y > y_0} n_y(a \vee b) > 0$. Or d'après (4) appliqué à $H = \{y \in \mathscr{I} \mid y > y_0\}$, $D = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(a \vee b)}$ et $D' = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{\max\left(n_y(a), n_y(b)\right)}$, on a

$$0 < \sum_{y > y_0} n_y(a \vee b) \leqslant \sum_{y > y_0} \max\bigl(n_y(a), n_y(b)\bigr)$$

donc il existe $y > y_0$ tel que $n_y(a) > 0$ ou $n_y(b) > 0$. On en déduit $n_{y_0}(\bar a \vee \bar b) = n_{y_0}(z) = n_{y_0}(\overline{a \vee b})$.

Si $\sum_{y>y_0} n_y(a\vee b) = 0$, $n_{y_0}(\bar a\vee\bar b) = \min\bigl(n_{y_0}(z), n_{y_0}(a\vee b)\bigr)$. Or d'après (4) appliqué à $H = \{y_0\}$, D et D', on a $n_{y_0}(a \vee b) \leqslant \max\bigl(n_{y_0}(a), n_{y_0}(b)\bigr)$, donc $n_{y_0}(\overline{a \vee b}) \leqslant n_{y_0}(\bar a \vee \bar b)$. On en déduit finalement $\overline{a \vee b} \leqslant \bar a \vee \bar b$.

Réciproquement, on a $\bar a \leqslant a \leqslant a \vee b$, $\bar b \leqslant b \leqslant a \vee b$ donc $\bar a \vee \bar b \leqslant a \vee b$, d'où d'après (c), $\overline{\bar a \vee \bar b} \leqslant \bar a \vee \bar b$, mais comme $\bar a \vee \bar b$ est un diviseur minimum de z, on a $\overline{\bar a \vee \bar b} = \bar a \vee \bar b$. □

Conséquence. Soit Z l'ensemble des diviseurs de z. L'opérateur de Z dans Z défini par $x \to \bar x$ est un opérateur de fermeture pour la relation $\geqslant$, compatible avec la loi $\vee$ (cf. Fuchs [5, p. 257] pour des propriétés analogues).

L'ensemble H muni de la loi $\vee$ est un holoïde. L'ordre est en effet le même que dans $(H, \cdot)$ puisque $a \leqslant b$ si et seulement si $a \vee b = b$. On peut donc définir des éléments irréductibles pour la loi $\vee$, qu'on appellera éléments $\vee$-irréductibles. On introduit de façon analogue les notions de $\vee$-décompositions, d'holoïde $\vee$-factoriel, etc.

Voici une caractérisation des éléments $\vee$-irréductibles.

(26) Proposition. *x est $\vee$-irréductible si et seulement si x est une puissance (non nulle) d'irréductible.*

Démonstration. Soit $y \in \mathscr{I}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $y^n = \vee_{y\in\mathscr{I}} a_i$. Soient $\bar a_i$ les adjoints de a_i dans y^n. Alors $y^n = \vee_{y\in\mathscr{I}} \bar a_i$ d'après (24). Puisque $\bar a_i$ est une diviseur minimum de y^n, $\bar a_i = y^{n_i}$ avec $n_i \leqslant n$ d'après (15). Comme il est clair que $\vee_{i\in I} y^{n_i} = y^{\max_{i\in I} n_i}$, ou bien il existe $i_0 \in I$ tel que $\max_{i\in I} n_i = n_{i_0}$, ou bien $I = \emptyset$. Le second cas est exclus car $n > 0$. Donc $y^{n_{i_0}} = \bar a_{i_0} = y^n$. Mais comme $\bar a_{i_0} \leqslant a_{i_0} \leqslant y^n$, on a $a_{i_0} = y^n$ et donc y^n est $\vee$-irréductible.

Réciproquement, soit x $\vee$-irréductible. Si $x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ est une décomposition de x, il vient $x = \vee_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ d'après (17). Donc $x = y_0^{n_{y_0}(x)}$ pour un $y_0 \in \mathscr{I}$. □

Énonçons maintenant le théorème le plus important.

(27) Théorème. *Si H est factoriel, alors H est $\vee$-factoriel.*

Démonstration. Soit $D = x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ la décomposition réduite de x. Alors $x = \vee_{y\in\mathscr{I}} y^{n_y(x)} = D^\vee$ est une $\vee$-décomposition de x d'après (17).

Considérons une autre $\vee$-décomposition de x, soit $x = \vee_{y\in\mathscr{I}} y^{n'_y(x)} = D'^\vee$. On a alors pour la même raison $x = \prod_{y\in\mathscr{I}} y^{n'_y(x)} = D'$. Puisque D est réduite, (7) s'applique : pour tout $y_0 \in \mathscr{I}$, il existe une injection de réduction $\sigma_{y_0} : y_0^{n_{y_0}(x)} \to D'$ et les images dans $\mathscr{I}$ des σ_{y_0} sont deux à deux disjointes.

— Si l'image dans $\mathscr{I}$ de σ_{y_0} contient un $y > y_0$, on pose

$$\sigma^\vee(y_0^{n_{y_0}(x)}) = y_0^{n'_y(x)}.$$

— Sinon on pose

$$\sigma^\vee(y_0^{n_{y_0}(x)}) = y_0^{n'_{y_0}(x)}.$$

$\sigma^\vee$ est une injection de $D^\vee$ dans $D'^\vee$. En effet, si

$$\sigma^\vee(y_1^{n_{y_1}(x)}) = x_1^{n_1} = \sigma^\vee(y_2^{n_{y_2}(x)}) = x_2^{n_2}$$

alors $x_1 = x_2$ d'après (12). Mais x_1 et x_2 sont dans l'image dans $\mathscr{I}$ de σ_{y_1} et σ_{y_2} respectivement et donc $y_1 = y_2$. Enfin il est clair que $x \leqslant \sigma^\vee(x)$, donc $x \vee \sigma^\vee(x) = \sigma^\vee(x)$ et x est inférieur ou égal à $\sigma^\vee(x)$ pour l'ordre associé à la loi $\vee$.

Donc $\sigma^\vee$ est une injection de réduction de $D^\vee$ dans $D'^\vee$ et $D^\vee$ est la $\vee$-décomposition réduite de x. $\square$

Remarque 8. La réciproque du théorème (27) est fausse. Considérons en effet l'holoïde $H = \{e, p, q, z\}$ dont la table est

	p	q	z
p	z	z	z
q	z	z	z
z	z	z	z

$\vee$	p	q	z
p	p	z	z
q	z	q	z
z	z	z	z

H est $\vee$-factoriel : p et q sont $\vee$-irréductibles et $z = p \vee q$. Mais H n'est pas factoriel puisque $pq = p^2 = q^2 = z$.

(28) Corollaire. *L'équation en x $a \vee x = m$ (pour $a \leqslant m$) admet une solution minimum.*

Démonstration. C'est la traduction du théorème (13). $\square$

5. P.G.C.D.

Nous ne mentionnerons dans ce paragraphe qu'une seule propriété.

(29) Proposition. *Soit H un holoïde factoriel, x et z des éléments de H. Si le p.g.c.d. de x et z existe (on le note $x \wedge z$), on a $(x \wedge z)(x \vee z) = xz$.*

Démonstration. Soient $x = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(x)}$ et $z = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(z)}$ les décompositions réduites de x et z respectivement.

Posons $t = \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(t)}$ où $n_y(t) = \min\bigl(n_y(x), n_y(z)\bigr)$. On a $t \leqslant x$ et $t \leqslant z$ donc $t \leqslant x \wedge z$. Or

$$\prod_{y \in \mathscr{I}} y^{\min(n_y(x), n_y(z))} \prod_{y \in \mathscr{I}} y^{\max(n_y(x), n_y(z))} = xz.$$

Donc $xz = t(x \vee y) \leqslant (x \wedge y)(x \vee y)$.

Réciproquement, soit d tel que $d \leqslant x$ et $d \leqslant z$. Soit $\prod_{y \in \mathscr{I}} y^{n_y(d)}$ la décomposition réduite de d. Soit $y_0 \in \mathscr{I}$. Le corollaire (9) appliqué aux inégalités $y_0^{n_{y_0}(d)} \leqslant x$ et $y_0^{n_{y_0}(d)} \leqslant z$ conduit à la discussion suivante :

Premier cas : $n_{y_0}(d) \leqslant n_{y_0}(x)$ et $n_{y_0}(d) \leqslant n_{y_0}(z)$.

Alors $n_{y_0}(d) \leqslant n_{y_0}(t)$, d'où

$$n_{y_0}(d) + \max\bigl(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z)\bigr) \leqslant n_{y_0}(x) + n_{y_0}(z).$$

Deuxième cas : y_0 est absorbé soit par x, soit par z, donc par xz. Alors

$$y_0^{n_{y_0}(d) + \max(n_{y_0}(x), n_{y_0}(z))} \leqslant xz.$$

On conclut d'après (10) que $(x \wedge z)(x \vee z) \leqslant xz$. $\square$

Remarque 9. En général $p(x \wedge z) \neq px \wedge pz$ (même si les deux membres sont définis).

Remerciements Je tiens à remercier mon ami Jacques Van de Wiele qui a largement contribué à la génèse de cet article et Messieurs les professeurs K. Keimel, B. Bosbach, G. Lallement et H. Mitsch pour leurs précieux conseils.

Références

[1] B. Bosbach, Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen, *Math. Ann.* **139** (1960), 184–196.

[2] B. Bosbach, Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe., *Math. Ann.* **141** (1960), 193–209.

[3] B. Bosbach, Arithmetische Halbgruppen, *Math. Ann.* **144** (1961), 239–252.

[4] M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur and R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[5] L. Fuchs, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, *Studia Mathematica–Mathematische Lehrbücher, Band XIX. Übersetzt aus dem Englischen von Éva Vas*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.

[6] H. Mitsch, Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen, *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M Math.* **4** (1973), 61–72 (1974). Beiträge zur Algebra und Geometrie, 2.

[7] H. Mitsch, Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen mit Teilbarkeitsordnungen, *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Reihe M Math.* **5** (1974), 23–35. Beiträge zur Algebra und Geometrie, 3.

IRIF, CNRS and Université Paris-Diderot, Case 7014, 75205 Paris Cedex 13, France.