MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

Olivier Carton, Jean-Éric Pin

Partiel du 18 novembre 2008, 14h 30 - 15h 50. Durée: 1h 20, notes de cours autorisées

⋆ ⋆ ⋆

Avertissement : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Partie 1. Monoïde syntactique de $(abb)^*$.

Question 1. Soit $A = \{a, b\}$. On considère le langage $L = (abb)^*$. Calculer son automate minimal.

Question 2. Calculer le monoïde syntactique M de L. On donnera la liste des éléments et les relations permettant de définir M.

Question 3. Calculer l'image de L dans M (image par le morphisme syntactique).

Question 4. Déterminer l'idéal minimal et les idempotents de M.

Question 5. Déterminer la structure en $\mathcal{D}$-classes de M (on dessinera les diagrammes boîtes à œufs).

Question 6. Selon vous, L est-il sans-étoile? Justifier votre réponse.

Partie 2. Langages de la forme u^*.

On considère plus généralement un langage de la forme u^* où u est un mot.

Question 7. Démontrer que les idempotents du monoïde syntactique de L commutent. Traduire cette propriété par un ensemble d'équations profinies satisfaites par le langage u^*.

Question 8. Conjecturer une condition caractérisant les mots u tels que le langage u^* soit sans-étoile.

Question 9. Démontrer votre conjecture.

MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

Olivier Carton, Jean-Éric Pin

November 18, 2008. Duration: 1h 20.

⋆ ⋆ ⋆

Warning : Clearness, accuracy and concision of the writing will be rewarded.

Part 1. Syntactic monoid of $(abb)^*$.

Question 1. Let $A = \{a, b\}$ and let L be the language $(abb)^*$. Compute the minimal automaton of L.

Question 2. Compute the syntactic monoid M of L. Give the list of its elements and its defining relations.

Question 3. Compute the image of L in M under the syntactic morphism.

Question 4. Compute the minimal ideal and the idempotents of M.

Question 5. Compute the $\mathcal{D}$-class structure of M (draw the egg-box pictures).

Question 6. Is L star-free or not? Justify your answer.

Part 2. Languages of the form u^*.

We now consider languages of the form u^* where u is a word.

Question 7. Prove that the idempotents of the syntactic monoid of u^* commute. Convert this property into a set of profinite equations satisfied by the language u^*.

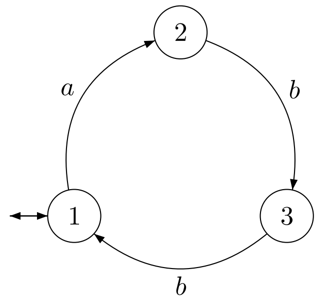
Question 8. Conjecture a condition characterizing the words u such that the language u^* is star-free.

Question 9. Prove your conjecture.

Corrigé

Partie 1. Monoïde syntactique de $(abb)^*$.

Question 1. L'automate minimal de L est



Question 2. Le monoïde syntactique M de L est donné par le tableau suivant:

	1	2	3
$*\ 1$	1	2	3
a	2	0	0
b	0	3	1
$*\ a^2$	0	0	0
ab	3	0	0
ba	0	0	2
b^2	0	1	0
$*\ ab^2$	1	0	0
$*\ bab$	0	0	3
$*\ b^2a$	0	2	0
bab^2	0	0	1
b^2ab	0	3	0

dans lequel les idempotents sont indiqués par une étoile. Les relations définissant M sont

$$a^2 = 0 \qquad aba = 0 \qquad baa = 0 \qquad b^2b = 0 \qquad ab^2a = a$$
$$b^2abb = b^2$$

Question 3. L'image de L est $\{ab^2\}$.

Question 4. L'idéal minimal est $\{a^2\}$ et les idempotents sont:

$$E(M) = \{1, a^2, ab^2, bab, b^2a\}$$

La structure en $\mathcal{D}$-classes est la suivante:

* 1

b

* b^2a	b^2ab	b^2
ba	* bab	bab^2
a	ab	* ab^2

* a^2

Question 5. Comme M est apériodique, le langage L est sans-étoile.

Partie 2. Langages de la forme u^*.

Question 6. Soit $n = |u|$ et soit M le monoïde syntactique de u^*. On va montrer que pour tout mot x et y, on a $x^n y^n \sim_{u^*} y^n x^n$. Par symétrie, il suffit d'établir que si $rx^n y^n s \in u^*$, alors $ry^n x^n s \in u^*$. La propriété est évidente si x ou y est le mot vide. Sinon, la longueur des mots x^n et y^n est un multiple de la longueur de u et comme $rx^n y^n s \in u^*$, il existe une factorisation $u = u'u''$ et des entiers p et q tels que $x^n = u''u^p u'$ et $y^n = u''u^q u'$. On en déduit immédiatement que $ry^n x^n s \in u^*$.

Soient maintenant e et f deux idempotents de M. On choisit pour x et y des mots dont les images syntactiques sont respectivment e et f. Comme $x^n y^n \sim_K y^n x^n$, on $ef = fe$ dans M. Cette propriété correspond aux équations profinies $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$ pour tout mot x, y (ou encore à l'identité profinie $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$).

Question 7. On va montrer que u^* est sans-étoile si et seulement si u n'est pas la puissance d'un mot plus court. Supposons en effet que $u = v^k$ avec $k > 0$. On vérifie immédiatement que $u \sim_{u^*} u^2$. Mais $v^{k+1} \not\sim_{u^*} v^k$ et par conséquent l'identité $x^\omega = x^{\omega+1}$ n'est pas vérifiée par M. Autrement dit, M n'est pas apériodique et u^* n'est pas sans-étoile.

Si en revanche u n'est pas la puissance d'un mot plus court.