MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

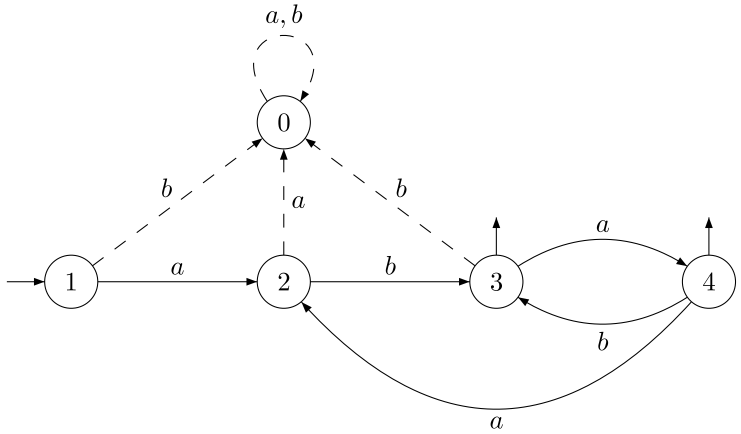
Olivier Carton, Jean-Éric Pin

Partiel du 10 novembre 2009, 14h 15 - 15h 45. Durée: 1h 30, notes de cours autorisées

⋆⋆⋆

Avertissement : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Soit $A = \{a, b\}$. On considère le langage $L = (ab + aba)^+$, dont l'automate minimal est donné ci-dessous (on ne demande pas de justifier le calcul de cet automate):



Question 1. Calculer le monoïde syntactique M de L. On donnera la liste des éléments (vous devriez trouver 12 éléments, en comptant l'élément neutre) et les relations permettant de définir M.

Question 2. Calculer l'image P de L dans M par le morphisme syntactique.

Question 3. Déterminer l'idéal minimal et les idempotents de M.

Question 4. Déterminer la structure en $\mathcal{D}$-classes de M (on dessinera les diagrammes boîtes à œufs).

Question 5. Montrez que L est sans-étoile.

Question 6. Donnez une expression sans étoile pour L.

Question 7. Soit u un mot. Montrer, en raisonnant sur P, que si $u^n \in L$ avec $n > 0$, alors $u \in L$.

MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

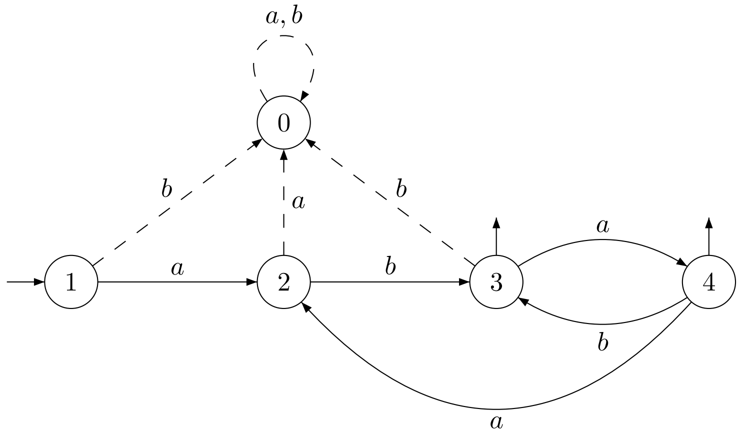
Olivier Carton, Jean-Éric Pin

November 18, 2008. Duration: 1h 20.

⋆⋆⋆

Warning : Clearness, accuracy and concision of the writing will be rewarded.

Let $A = \{a, b\}$ and let L be the language $(ab + aba)^+$. Its minimal automaton is given below (it is not asked to justify the computation of this automaton):



Question 1. Compute the syntactic monoid M of L. Give the list of its elements (you should find 12 elements, including the identity) and of its defining relations.

Question 2. Compute the image of L in M under the syntactic morphism.

Question 3. Compute the minimal ideal and the idempotents of M.

Question 4. Compute the $\mathcal{D}$-class structure of M (draw the egg-box pictures).

Question 5. Prove that L star-free.

Question 6. Give a star-free expression for L.

Question 7. Let u be word. Prove, by arguing on P, that if $u^n \in L$ for some $n > 0$, then $u \in L$.

Corrigé

Question 1. Le monoïde syntactique M de L est donné par le tableau suivant:

	1	2	3	4
$*\ 1$	1	2	3	4
a	2	0	4	2
b	0	3	0	3
a^2	0	0	2	0
$*\ ab$	3	0	3	3
$*\ ba$	0	4	0	4
$*\ b^2$	0	0	0	0
$*\ a^2b$	0	0	3	0
$*\ aba$	4	0	4	4
$*\ ba^2$	0	2	0	2
a^2ba	0	0	4	0
aba^2	2	0	2	2

dans lequel les idempotents sont indiqués par une étoile. L'élément b^2 est un zéro et les relations définissant M sont

$$a^3 = 0 \qquad ab^2 = 0 \qquad bab = b \qquad b^2 = 0 \qquad ba^2b = b \qquad a^2ba^2 = a^2$$

Question 2. L'image de L est le sous-semigroupe $P = \{ab, aba\}$.

Question 3. L'idéal minimal est $\{b^2\}$ et les idempotents sont

$$E(M) = \{1, ab, ba, b^2, a^2b, aba, ba^2\}$$

Question 4. La structure en $\mathcal{D}$-classes est la suivante:

$^*\ 1$

a

a^2	a^2ba	$^*\ a^2b$
aba^2	$^*\ aba$	$^*\ ab$
$^*\ ba^2$	$^*\ ba$	b

$^*\ b^2$

Question 5. Comme M est apériodique, le langage L est sans-étoile.

Question 6. On a $L = (abA^* \cap A^*(b + ba)) \setminus A^*(b^2 + a^3)A^*$

Question 7. Soit s l'image de u par le morphisme syntactique. Comme $u^n \in L$, on a $s^n \in P$. Si s est idempotent, on a $s^n = s$ et donc $s \in P$ et $u \in L$. Si s est non régulier et appartient à la $\mathcal{D}$-classe à 9 éléments, alors $s^n = 0$ pour $n > 1$ et donc on ne peut pas avoir $s^n \in P$. Reste le cas $s = a$, qui donne $s^2 = a^2$ et $s^n = 0$ pour $n > 2$. Là encore, on ne peut avoir $s^n \in P$.