MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

Olivier Carton, Jean-Éric Pin

Examen du 7 mars 2012. Durée: 2h 30, notes de cours autorisées

⋆⋆⋆

Avertissement : On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

1. Étude d'un langage

Soit $A = \{a, b\}$ et soit $L = a(b^2)^*a$.

Question 1. Calculer l'automate déterministe minimal de L.

Question 2. Calculer le monoïde syntactique de L (on trouvera 10 éléments).

Question 3. Quels sont les idempotents de M?

Question 4. Déterminer la structure en $\mathcal{D}$-classes de M.

Question 5. Le monoïde M est-il apériodique?

Question 6. Parmi ces équations, quelles sont celles qui sont satisfaites par M? (Justifier vos réponses)
(1) $aba = bab$
(2) $ab^2 = b^2a$
(3) $ab^2a = a^2$

Question 7. Parmi ces identités profinies, quelles sont celles qui sont satisfaites par M? (Justifier vos réponses)
(1) $x^4 = x^2$
(2) $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$
(3) $(xy)^\omega x = x(xy)^\omega$
(4) $x^\omega y = yx^\omega$

Question 8. Soit $\mathcal{V}$ la plus petite variété de langages telle que $\mathcal{V}(A^*)$ contienne L. Montrer que $\mathcal{V}(A^*)$ contient aussi les langages ab^* et ba^*, mais ne contient pas les langages A^*a et $(ab)^*$.

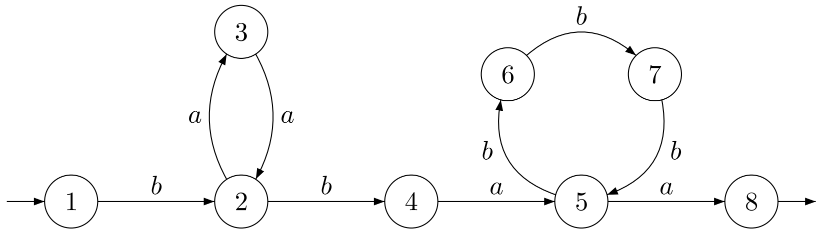
2. Une classe d'automates

On rappelle qu'un *préordre* est une relation réflexive et transitive. Si $\leqslant$ est un préordre sur un ensemble Q, on notera $\sim$ la relation d'équivalence sur Q definie par $q \sim q'$ si et seulement si $q \leqslant q'$ et $q' \leqslant q$.

Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, i, F)$ un automate fini déterministe, mais pas nécessairement complet. On dit que $\mathcal{A}$ est *bon* s'il existe un préordre total $\leqslant$ sur Q tel que les conditions suivantes soient vérifiées:

(1) si $q_1 \leqslant q_2$ et si $q_1 \cdot a$ et $q_2 \cdot a$ sont définis, alors $q_1 \cdot a \leqslant q_2 \cdot a$,
(2) si $q \cdot a$ est défini, alors $q \leqslant q \cdot a$,
(3) si $q_1 \cdot a = q_2 \cdot a$, alors $q_1 = q_2$,
(4) si $q \cdot a \sim q$, alors a induit une permutation sur la $\sim$-classe -d'équivalence de q.

Question 9. Trouver un préordre pour lequel l'automate representé ci-dessous est bon. On donnera aussi la relation d'équivalence associée à ce préordre.



Question 10. Soit M le monoïde de transition d'un bon automate. Montrer en utilisant la condition (3) que les idempotents de M commutent.

Question 11. Montrer que les $\mathcal{D}$-classes régulières de M sont des groupes.

Question 12. Montrer que la classe des monoïdes finis dont les idempotents commutent et dont les $\mathcal{D}$-classes régulières sont des groupes est une variété de monoïdes finis. On notera $\mathbf{W}$ cette variété.

Question 13. Montrer qu'un langage sans-étoile est reconnu par un bon automate si et seulement si il est union finie de langages de la forme $A_0^*a_1A_1^* \cdots a_kA_k^*$ où $a_1, \ldots, a_k \in A$ et $A_0, \ldots, A_k$ sont des parties de A (éventuellement vides) telles que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$.

Question 14. Montrer qu'un langage sans-étoile est reconnu par un bon automate si et seulement si son monoïde syntactique est $\mathcal{J}$-trivial et a ses idempotents qui commutent.

On dit qu'un langage est un *langage à groupe* si son monoïde syntactique est un groupe fini. Un langage L est *groupe-élémentaire* si $L = L_0a_1L_1 \cdots a_kL_k$, où $a_1, \ldots, a_k$ sont des lettres de A, $A_0, \ldots, A_k$ sont des parties (éventuellement vides) de A telles que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$ et $L_0 \subseteq A_0^*, \ldots, L_k \subseteq A_k^*$ sont tels que chaque L_i, considéré comme langage de A_i^*, est un langage à groupe.

Soit M un monoïde fini dont les idempotents commutent et soit $\varphi : A^* \to M$ un morphisme surjectif. On admettra la propriété (P) suivante: il existe un entier $N > 0$ tel que tout mot w de A^* se factorise en $w = u_0v_1u_1 \ \cdots \ v_ku_k$ où
(1) $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ sont réguliers dans M,
(2) si b_{i-1} est la dernière lettre de u_{i-1} et si a_i est la première lettre de u_i, alors $\varphi(b_{i-1}v_i)$ et $\varphi(v_ia_i)$ ne sont pas réguliers,
(3) $|u_0 \cdots u_k| \leqslant N$.

Question 15. Montrer qu'un langage est reconnu par un bon automate si et seulement si il est union finie de langages groupe-élémentaires.

Question 16. Montrer qu'un langage reconnaissable est reconnu par un bon automate si et seulement son monoïde syntactique appartient à $\mathbf{W}$.

Question 17. Démontrer la propriété (P).

MPRI, Fondations mathématiques de la théorie des automates

Olivier Carton, Jean-Éric Pin

March 7, 2012. Duration: 2h 30.

⋆⋆⋆

Warning : Clearness, accuracy and concision of the writing will be rewarded.

1. Study of a language

Let $A = \{a, b\}$ and let $L = a(b^2)^*a$.

Question 1. Compute the mininimal deterministic automaton of L

Question 2. Compute the syntactic monoid M (you should find 10 elements).

Question 3. Find the idempotents of M?

Question 4. Give the $\mathcal{D}$-class structure of M.

Question 5. Is M aperiodic?

Question 6. Among these equations, which ones are satisfied by M? (Justify your answers)
(1) $aba = bab$
(2) $ab^2 = b^2a$
(3) $ab^2a = a^2$

Question 7. Among these identities, which ones are satisfied by M? (justify your answers)
(1) $x^4 = x^2$
(2) $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$
(3) $(xy)^\omega x = x(xy)^\omega$
(4) $x^\omega y = yx^\omega$

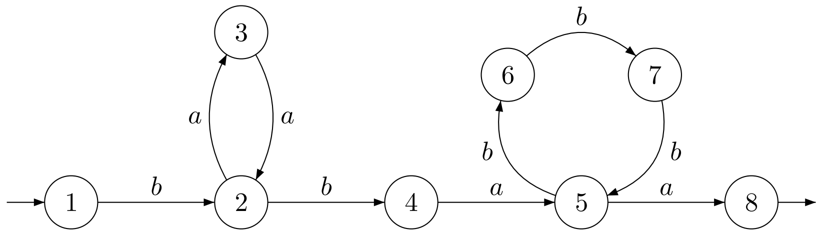
Question 8. Let $\mathcal{V}$ be the smallest variety of languages such that L belongs to $\mathcal{V}(A^*)$. Prove that $\mathcal{V}(A^*)$ also contains the languages ab^* and ba^*, but does not contain the languages A^*a and $(ab)^*$.

2. A class of automata

Recall that a *preorder* is a reflexive and transitive relation. If $\leqslant$ is a preorder on a set Q, we denote by $\sim$ the equivalence relation on Q defined by $q \sim q'$ if and only if $q \leqslant q'$ and $q' \leqslant q$.

Let $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, i, F)$ be a deterministic finite automaton, not necessarily complete. We say that $\mathcal{A}$ is *good* if there exists a total preorder $\leqslant$ on Q such that the following conditinos are satisfied:
(1) if $q_1 \leqslant q_2$ and if $q_1 \cdot a$ and $q_2 \cdot a$ are defined, then $q_1 \cdot a \leqslant q_2 \cdot a$,
(2) if $q \cdot a$ is defined, then $q \leqslant q \cdot a$,
(3) if $q_1 \cdot a = q_2 \cdot a$, then $q_1 = q_2$,
(4) if $q \cdot a \sim q$, then a induces a permutation on the $\sim$-class of q.

Question 9. Find a preorder for which the automaton below is good. Also give the equivalence relation associated with this preorder.



Question 10. Let M be the transition automaton of a good automaton. Use Condition (3) to show that the idempotents of M commute.

Question 11. Show that the regular $\mathcal{D}$-classes of M are groups.

Question 12. Prove that the class of all finite monoids whose idempotents commute and in which each regular $\mathcal{D}$-class is a group form a variety of finite monoids. This variety will be denoted $\mathbf{W}$.

Question 13. Prove that a star-free language is recognised by a good automaton if and only if it is a finite union of languages of the form $A_0^*a_1A_1^* \cdots a_kA_k^*$ where $a_1, \ldots, a_k \in A$ and $A_0, \ldots, A_k$ are (possibly empty) subsets of A such that, for $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$.

Question 14. Prove that a star-free language is recognised by a good automaton if and only if its syntactic monoid is $\mathcal{J}$-trivial and has commuting idempotents.

A language is a *group language* if its syntactic monoid is a finite group. A language L is *group-elementary* if $L = L_0a_1L_1 \cdots a_kL_k$ where $a_1, \ldots, a_k$ are letters of A, $A_0, \ldots, A_k$ are (possibly empty) subsets of A such that, for $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i \notin A_{i-1} \cup A_i$ and $L_0 \subseteq A_0^*, \ldots, L_k \subseteq A_k^*$ are such that each L_i, considered as a language of A_i^*, is a group language.

Let M be a finite monoid with commuting idempotents and let $\varphi : A^* \to M$ be a surjective morphism. We shall admit the followwing poperty (P): there is an integer $N > 0$ such that every word $w \in A^*$ can be factorized as $w = u_0v_1u_1 \ \cdots \ v_ku_k$ where

(1) $v_1\eta, \ldots, v_k\eta$ are regular,

(2) if b_{i-1} is the last letter of u_{i-1} and if a_i is the first letter of u_i, then $(b_{i-1}v_i)\eta$ and $(v_ia_i)\eta$ are not regular,

(3) $|u_0 \cdots u_k| \leqslant N$.

Question 15. Show that a language is recognised by a good automaton if and only if it is a finite union of group-elementary languages.

Question 16. Show that a recognisable language is recognised by a good automaton if and only if its syntactic monoid belongs to $\mathbf{W}$.

Question 17. Prove property (P).

Solution

1. Study of a language

The mininimal deterministic automaton of L is

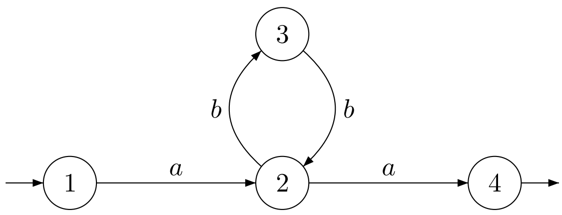


Figure 1: L'automate minimal de $a(b^2)^*a$.

Its syntactic monoid M is generated by the following generators:

	1	2	3	4
a	2	4	0	0
b	0	3	2	0

Elements:

	1	2	3	4
$*\ 1$	1	2	3	4
a	2	4	0	0
b	0	3	2	0
a^2	4	0	0	0
ab	3	0	0	0
ba	0	0	4	0
$*\ b^2$	0	2	3	0
$*\ a^3$	0	0	0	0
ab^2	2	0	0	0
b^2a	0	4	0	0

This monoid has a zero: $a^3 = 0$.
Relations:

$$a^2b = 0 \qquad aba = 0 \qquad ba^2 = 0 \qquad bab = 0 \qquad b^3 = b \qquad a^3 = 0 \qquad ab^2a = a^2$$

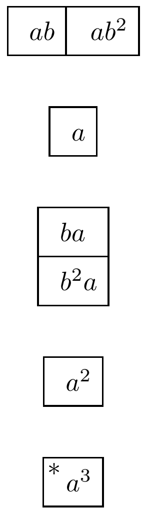
Idempotents:

$$E(S) = \{1, b^2, a^3\}$$

$\mathcal{D}$-classes:

$$\boxed{{}^*1}$$

$$\boxed{{}^*b^2 \quad b}$$

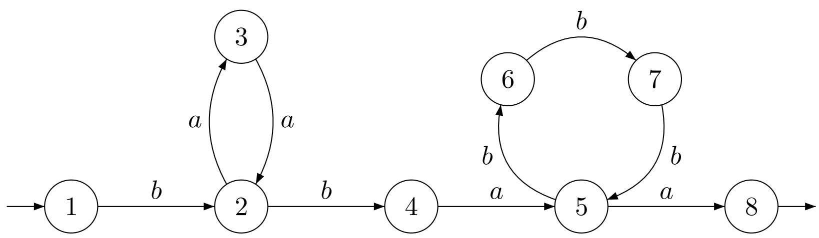


The monoid M is not aperiodic, since $b^\omega \neq b^{\omega+1}$. It satisfies the equations $aba = bab$ and $ab^2a = a^2$ but does not satisfy the equation $ab^2 = b^2a$. It also satisfies the identities $x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega$ and $(xy)^\omega x = x(xy)^\omega$ but it neither satisfies the identity $x^4 = x^2$ (take $x = a$ nor the identity $x^\omega y = yx^\omega$ (take $x = b$ and $y = a$).

Let $\alpha : A^* \to A^*$ be the morphism defined by $\alpha(a) = a$ and $\alpha(b) = bb$. Then $\alpha^{-1}(L) = ab^*a$. Thus $ab^*a \in \mathcal{V}(A^*)$. Now, $ab^* = (ab^*a)a^{-1}$ and $b^*a = a^{-1}(ab^*a)$ are both in $\mathcal{V}(A^*)$. However, the languages A^*a and $(ab)^*$ are not in $\mathcal{V}(A^*)$ since the idempotents of their syntactic monoid do not commute.

2. A class of automata

The automaton below is good for the preorder $0 \leqslant 1 \sim 2 \leqslant 3 \leqslant 4 \sim 5 \sim 6 \leqslant 7$.



Let $\mathcal{A}$ be a good automaton and let e be an idempotent of its transition monoid M. Then for every $q \in Q$ such that $q \cdot e$ is defined, we have $q \cdot e = (q \cdot e) \cdot e$ and thus $q = q \cdot e$ by (3). Therefore e acts on Q as a partial identity and it follows immediately that idempotents commute in M.

For the rest of the problem see [1]. This article is available at
`http://www.liafa.jussieu.fr/~jep/Resumes/AshHallPin.html`

References

[1] C. Ash, T. Hall and J.-E. Pin, On the varieties of languages associated to some varieties of finite monoids with commuting idempotents, *Information and Computation* **86** (1990), 32–42.