Algorithmique - Maitrise d'informatique - TD5
Floyd-Warshall

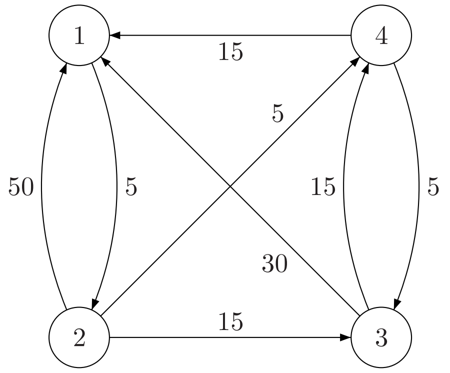

Figure 1: Un graphe dirigé pondéré positivement.

Exercice 1. Donner la suite des matrices calculées par l'algorithme de Floyd-Warshall pour le graphe de la figure .

Exercice 2. Montrez à l'aide d'un contre-exemple que l'on ne peut pas, dans l'algorithme de Floyd-Warshall, commuter les deux boucles internes sur i et j avec la boucle externe sur k.

Exercice 3. Une réduction transitive G' d'un graphe G, est un graphe optimal en nombre d'arêtes, et qui a la même clôture transitive, (pas nécessairement les mêmes arêtes).

1. Soit G le graphe $V = \{1,2,3,4,5\}$ et $E = \{(1,3),(1,4),(4,3),(2,4),(5,4),(2,5)\}$. En donner une réduction transitive.

2. Montrer qu'en fait si G est acyclique sa réduction transitive est unique.

3. Que dire de la réduction transitive d'une composante fortement connexe ?

   Lorsque le graphe est acyclique, on peut montrer que la réduction transitive et la clôture transitive ont la même complexité.

4. Écrire un algorithme qui calcule la clôture transitive d'un graphe.

5. Utiliser la remarque précédente pour trouver un algorithme qui calcule la réduction transitive ?

6. Prouvez que votre algorithme préserve la clôture transitive
7. Montrer que le graphe résultat de votre algorithme est inclus dans tout graphe de même clôture transitive que G. En déduire la correction de votre algorithme.
8. Étendre votre algorithme pour prendre en compte les graphes non nécessairement acycliques.
9. Quelle est sa complexité ?

Exercice 4. Modifier l'algorithme de Floyd-Warshall de manière à ce que les chemins trouvés soient non seulement de poids minimaux mais aussi de longueurs minimales.

Correction 1. Juste pour mémoire:

Algorithm 1 Floyd Warshall

$D^0 \leftarrow M$
$\Pi^0(i,j) \leftarrow i$ si arête entre i et j et NIL sinon
for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
    for $j = 1, 2, \ldots, n$ **do**
      if $D^k(i,j) > D^{k-1}(i,k) + D^{k-1}(k,j)$ **then**
        $D^{k-1}(i,j) \leftarrow D^{k-1}(i,k) + D^{k-1}(k,j)$
        $\Pi^k(i,j) \leftarrow \Pi^{k-1}(k,j)$
      else
        $D^{k-1}(i,j) \leftarrow D^{k-1}(i,j)$
        $\Pi^k(i,j) \leftarrow \Pi^{k-1}(i,j)$
      end if
    end for
  end for
end for

Itération 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} NIL & 1 & NIL & NIL \\ 2 & NIL & 2 & 2 \\ 3 & 1 & NIL & 3 \\ 4 & 1 & 4 & NIL \end{pmatrix}$$

Itération 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 20 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} NIL & 1 & 2 & 2 \\ 2 & NIL & 2 & 2 \\ 3 & 1 & NIL & 3 \\ 4 & 1 & 4 & NIL \end{pmatrix}$$

Itération 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 20 & 10 \\ 45 & 0 & 15 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} NIL & 1 & 2 & 2 \\ 3 & NIL & 2 & 2 \\ 3 & 1 & NIL & 3 \\ 4 & 1 & 4 & NIL \end{pmatrix}$$

Itération 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 & 10 \\ 20 & 0 & 10 & 5 \\ 30 & 35 & 0 & 15 \\ 15 & 20 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} NIL & 1 & 2 & 2 \\ 4 & NIL & 4 & 2 \\ 3 & 1 & NIL & 3 \\ 4 & 1 & 4 & NIL \end{pmatrix}$$

Correction 2. Le graphe du premier exercice est un contre-exemple.

Correction 3.

1.

2. Soit G' et G'' 2 réductions transitives de G acyclique. Supposons qu'il existe un arc (x, y) dans G' qui ne soit pas dans G''. Puisqu'on a la mémé clôture transitive, alors il existe un z tq $(x, z)_{G''}.z \rightarrow_{G''} y$. Meme argument, il existe des chemins $\gamma_1 = x \rightarrow_{G'} z$ et $\gamma_2 = z \rightarrow_{G'} y$. Et $\gamma_1.\gamma_2$ n'utilise pas l'arc $(x, y)_{G'}$. Ce qui nie le fait que G' soit minimal.

   L'inclusion de G' dans G'' plus le nombre minimal d'arete justifient l'egalite.

3. Elle n'est pas unique : prendre un graphe qui a 2 cycles sur les memes sommets, et de sens differents. On peut prendre pour reduction un cycle qui passe par tout les sommets. Il est de longueur n. Il est minimal parce qu'avec p arcs j'atteinds au plus $p+1$ sommets.

   On peut aussi trouver un exemple ou uen reduction transitive n'est pas un sous graphe. (Ce qui ne sera pas le cas si le graphe est acyclique, on va le montrer dans un instant)

4. C'est du Floyd warshall, disons avec une matrice de booleens. Le plus est un OU, on fait MAX au lieu de MIN, et initialement on met des 0 partout sauf s'il y a un arc. (rq max c'est un ou)

5. Pour le trouver, proposer un exemple, disons $a \to b \to c \to d$ et $a \to d$, qui doit faire apparaitre le besoin de cloture transitive et d'ordre topologique. Je pense qu'il faut tout detailler la methode sur cet exemple.
   Le schema de l'algo est le suivant :

   ```
   1 : Calculer la cloture transitive de G, a la matrice d'adjacence de Floyd-warshall
   2 : Ordonner les sommets dans un ordre topologique
   3 : pour chaque arc (i,j) pris dans l'ordre produit des ordres topologiques faire :
   4 :      si exists k dans ]i,j[ tq i-> k ->j alors on supprime l'arc (i,j) de la matrice
   ```

   On peut remarquer qu'apres avoir ordonne les sommets, on peut construire une matrice d'adjacence triangulaire.

6. Il est clair que la cloture transitive est preservee a chaque etape

7. Soit G le resultat de l'algo, et G' un graphe de meme cloture transitive. Le raisonnement de la question 2 tiens encore : le z intermediaire est plus grand que x, et plus petit que y, donc l'arc (xy) de G aurait du etre supprime. Bref $G \subset G'$, en particulier G est dans la reduction transitive, et par minimalite le resultat est bien la reduction transitive.

8. Il faut au prealable calculer les composantes fortement connexe. On remplace chacune par un cycle simple. Puis on peux jouer avec les arcs entrant et sortants de cette composante en le greffant sur n'importe quel element du cycle, ou bien les laisser tel quels.

9. On reparle ici de la complexite de presque tout les algos qu'on a vu aux TD d'avant. Reste le $O(n^3)$.

Correction 4. Il suffit de rajouter une trace du nombre de chemin et en cas d'égalité de poids de prendre le chemin le plus court.

Algorithm 2 Floyd Warshal: 2

$D^0 \leftarrow M$
$\Pi^0(i,j) \leftarrow i$ si arête entre i et j et NIL sinon
$Nb^0 \leftarrow 1$ si arête entre i et j et $i \neq j$
for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
    for $j = 1, 2, \ldots, n$ **do**
      if $(D^k(i,j) > D^{k-1}(i,k) + D^{k-1}(k,j))$ ou $(D^k(i,j) = D^{k-1}(i,k) + D^{k-1}(k,j)$ et $Nb^{k-1}(i,j) > Nb^{k-1}(i,k) + Nb^{k-1}(k,j))$ **then**
        $D^{k-1}(i,j) \leftarrow D^{k-1}(i,k) + D^{k-1}(k,j)$
        $\Pi^k(i,j) \leftarrow \Pi^{k-1}(k,j)$
        $Nb^k(i,j) \leftarrow Nb^{k-1}(i,k) + Nb^{k-1}(k,j)$
      else
        $D^{k-1}(i,j) \leftarrow D^{k-1}(i,j)$
        $\Pi^k(i,j) \leftarrow \Pi^{k-1}(i,j)$
        $Nb^k(i,j) \leftarrow Nb^{k-1}(i,j)$
      end if
    end for
  end for
end for