Examen d'Algorithmique - Maitrise d'Informatique

12 Septembre 2000

Durée: 2 heures.
Documents: Seuls sont autorisés les notes manuscrites de cours et TD.
NB: Le barême est indicatif.

Exercice 1 (12 points)

Soit $G = (S, A)$ un graphe. On suppose que $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ et que l'on dispose d'une fonction Adj qui associe à chaque sommet donné u l'ensemble de ses sommets adjacents, c'est-à-dire, l'ensemble des sommets v tels que $(u, v) \in A$.

On donne l'algorithme DFS suivant:

DFS(G) =

    pour tout $u \in S$ **faire**

        couleur[u] $\leftarrow$ blanc

        $\pi[u] \leftarrow$ Nil

    temps $\leftarrow 0$

    pour tout $u \in S$ **faire**

        si couleur[u] = blanc **alors** DFS-visite(u)

DFS-visite(u) =

    couleur[u] $\leftarrow$ gris

    $t[u] \leftarrow$ temps

    temps $\leftarrow$ temps $+1$

    pour tout $v \in Adj[u]$ **faire**

        si couleur[v] = blanc **alors**

            $\pi[v] \leftarrow u$

            DFS-visite(v)

    couleur[u] $\leftarrow$ noir

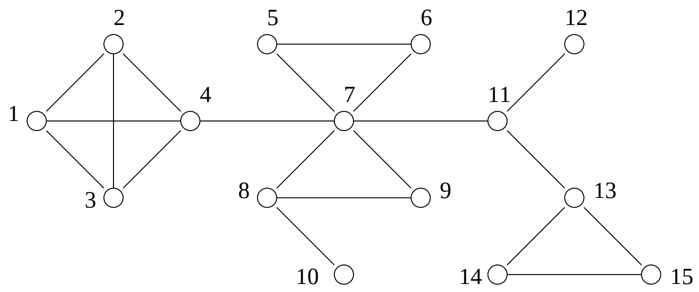

Figure 1: Un graphe non orienté connexe

Cet algorithme effectue un parcours en “profondeur d'abord” du graphe G. Initialement, tous les sommets sont de couleur blanche, signifiant qu'ils n'ont pas encore été visités. Un sommet visité est de couleur grise. Un sommet dont le traitement est terminé est de couleur noire.

On définit le graphe $G_\pi = (S, A_\pi)$ où $A_\pi = \{(\pi[u], u) \mid u \in S \text{ et } \pi[u] \neq \text{ Nil}\}$.

Question 1: Montrer que si G est un graphe non orienté connexe, alors le graphe G_π est un arbre. Qu'en est-il dans le cas général ? Donner l'arbre G_π correspondant au graphe représenté par la figure 1. Au moment où un sommet u est visité (au moment de l'appel DFS-visite(u)), que peut on dire des sommets qui ont une couleur grise ? et que peut-on dire des valeurs de t pour ces sommets ?

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe. Un *sommet d'articulation* est un sommet dont la suppression déconnecte le graphe G (le graphe G n'est plus connexe après la suppression de ce sommet). Un *pont* est un arc dont la suppression déconnecte G.

Question 2: Donner les sommets d'articulation et les ponts du graphe de la figure 1.

Question 3: Montrer que la racine de G_π est un sommet d'articulation si et seulement si elle a au moins deux fils dans G_π. Montrer qu'un sommet v de G_π différent de la racine est un sommet d'articulation si et seulement si il n'existe pas d'arcs (u, w) dans G tel que u est un descendant de v dans G_π (il existe un chemin allant de v à u dans cet arbre), et w est un ancêtre strict de v (ancêtre différent de v lui même).

On dit qu'un arc (u, w) est un arc *en arrière*, si w est un ancêtre de u dans l'arbre G_π. Soit

$$f[v] = min(t[v], \{t[w] \mid (u, w) \text{ est un arc arrière tel que } u \text{ est un descendant de } v\})$$

Question 4: Donner un algorithme en $O(S)$ qui calcule $f[v]$ pour tout sommet $v \in S$. Donner un algorithme en $O(S)$ qui calcule tous les sommets d'articulation de G.

Question 5: Montrer qu'un arc de G est un pont si et seulement si il n'appartient à aucun circuit simple de G (rappel: un circuit simple est un circuit dans lequel aucun sommet n'apparait plus d'une fois).

Question 6: Donner un algorithme en $O(S)$ qui calcule tous les ponts de G.

Exercice 2 (8 points)

On considère dans cet exercice le problème du calcul de la fermeture reflexive-transitive d'une relation décrite par un graphe $G = (S, A)$. On suppose que $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ et que l'ensemble A est décrit par une matrice d'adjacence.

On veut concevoir un algorithme permettant de mettre à jour cette fermeture reflexive-transitive lorsqu'on ajoute un nouvel arc à l'ensemble A.

Question 1: Donner un algorithme en $O(S^2)$ qui, étant donné une représentation de la fermeture reflexive-transitive $G^* = (S, A^*)$ d'un graphe $G = (S, A)$, calcule une représentation de la fermeture reflexive-transitive du graphe G auquel un nouvel arc a été ajouté.

Soit $i \in S$ un sommet de G. On note $G_i = (S_i, A_i)$ où $S_i = \{1, \ldots, i\}$ et $A_i = \{(u, v) \in A \mid u, v \in S_i\}$ (c'est-à-dire, la relation A restreinte aux sommets de S_i).

Question 2: Donner un algorithme en $O(S^2)$ qui, étant donnée une représentation de la fermeture reflexive-transitive de G_i, calcule une représentation de la fermeture reflexive-transitive de G_{i+1}, pour $i < n$. En déduire un algorithme en $O(S^3)$ permettant de calculer la fermeture reflexive-transitive d'un graphe.