Logique Linéaire, Différentielle et Analyse

13ème Forum des jeunes mathématicien-ne-s
Novembre 2013

Marie Kerjean, Laboratoire PPS, Université Paris 7

La logique linéaire résulte d'un dialogue entre syntaxe et sémantique, et enrichit celui-ci.

- Un exemple via des concepts algébriques.

- Un exemple via des outils de l'analyse.

On aboutit à retrouver les constructions de la logique linéaire dans celles de l'analyse fonctionnelle [K., Tasson 2013].

Logique, Programmes et Maths

Logique Linéaire

Logique Linéaire Différentielle et modèles continus

Logique, Programme et Maths

Curry-Howard

Programmes	**Logique**
Terme	Preuve
Type	Formule
Evaluation	Règle de coupure

Exemple

Programmes	$\rightsquigarrow$	**Logique**
Entiers	$\rightsquigarrow$	$nat := \forall X (X \to X) \to (X \to X)$
Fonction : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$\rightsquigarrow$	$nat \to nat$.
P de type A	$\rightsquigarrow$	$[P]$ preuve de A

Si $f : nat \to nat$, $n : nat$, on peut définir $[f][n]$ grace à la règle *cut* :

$$\dfrac{\dfrac{[n]}{nat} \qquad \dfrac{[f]}{nat \to nat}}{nat}$$

La procédure d'élimination des coupures dans $[f][n]$ correspond au calcul de f (n). La preuve sans coupures ainsi obtenue est égale à $[f(n)]$.

Sémantique dénotationnelle

Programmes : Syntaxe	**Sémantique catégorique**	**Logique : Syntaxe**
Terme $P = \lambda x^A.y^B$	Fonction $f : A \to B$	Preuve $\vdash A \Rightarrow B$
Type A	Objet A	Formule A
Évaluation $Pt \rightsquigarrow_\beta t'$	Égalité	Elimination des coupure

Un exemple : Catégories cartésiennes close

Programmes	Sémantique catégorique	Logique
λ-calcul	Catégories Cartésiennes closes	Logique minimale

Définition

Une Catégorie Cartésienne Close est une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$ telle que pour tout $A, B, C \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(A \times B, C) \simeq \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C))$$

Cela correspond à la possibilité de Curryfier ou non un programme :

$$f : x, y \mapsto x + y \simeq f : x \mapsto (y \mapsto x + y)$$

Un exemple : Catégories cartésiennes closes

Programmes	Sémantique catégorique	Logique
λ-calcul	Catégories Cartésiennes closes	Logique minimale

$$\mathcal{C}(A \times B, C) \simeq \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(B, C))$$

Cela correspond à la possibilité de Curryfier ou non un programme :

$$f : x, y \mapsto x + y \simeq f : x \mapsto (y \mapsto x + y)$$

Les catégories cartésiennes sont la bonne interprétation du fonctionnement d'un programme et de leur application, des preuves et de la règle *cut*.

Logique Linéaire

Rappel

Une preuve c'est quoi ?

$$\frac{\begin{array}{c}[\pi]\\ \vdots\end{array}}{A_1, ...A_n \vdash B}$$

Syntaxe de la logique linéaire

Découverte par Girard en 1988 à partir d'une étude d'une bonne catégorie cartésienne close, la logique linéaire distingue les preuves non-linéaires des preuves linéaires.

- $A \Rightarrow B$ est l'implication usuelle, non linéaire
- $A \multimap B$ est l'implication linéaire.

Une preuve linéaire de B sous l'hypothèse A est une preuve de $A \multimap B$. C'est une preuve qui utilise une fois seulement l'hypothèse A.

Syntaxe de la logique linéaire

Découverte par Girard en 1988 à partir d'une étude d'une bonne catégorie cartésienne close, la logique linéaire distingue les preuves non-linéaires des preuves linéaires.

- $A \Rightarrow B$ est l'implication usuelle, non linéaire
- $A \multimap B$ est l'implication linéaire.

Une preuve non-linéaire de B sous l'hypothèse A est une preuve de $A \Rightarrow B$. C'est une preuve qui utilise plusieurs fois seulement l'hypothèse A.

Sémantique de la logique linéaire

Interpréter deux sortes de preuves par deux sortes de fonctions.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \begin{array}{c}\text{Fonctions non-linéaires}\\ A \Rightarrow B, \&, \oplus\end{array} \arrow[r, bend left, "!"] & \begin{array}{c}\text{Fonctions linéaires}\\ A \multimap B, \otimes, \parr\end{array} \arrow[l, bend left, "\mathcal{U}"] \end{tikzcd}$$

Catégorie cartésienne close — Catégorie monoïdale close

Un modèle de la logique linéaire est une bonne adjonction entre une catégorie cartésienne close, et une catégorie monoïdale close.

Un exemple : Rel

Syntaxe	$\rightsquigarrow$	**Sémantique**
Formule A		Ensemble $[A]$

- $[A]$ est un ensemble.
- $[A \multimap B]$ est l'ensemble des relations de $[A]$ vers $[B]$.
- On définit $[!A]$ comme l'ensemble des multi-ensembles finis de $[A]$.
- $[A \Rightarrow B]$ est l'ensemble des relations de $[!A]$ vers $[B]$.

Un appel à d'autres modèles

... Tournés vers l'algèbre linéaire.

Problème : avoir une catégorie cartésienne close en mathématiques est assez exigeant.

Exemples :

- Domaines de Scott.
- Espaces compactements engendrés et fonctions k-continues.
- Espaces convenants et fonctions lisses de Frölicher.

Différentielle et modèles continus

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe

Sémantique

λ-calcul

CCC
Lambek 70's

Logique linéaire

Linéarité

Espaces cohérents
Girard 88

Logique linéaire différentielle

Sémantique quantitative

Espaces de finitude Erhard 2005

λ-calcul différentiel

Différentiation

Espaces Réflexifs
K., Tasson 2013

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe		Sémantique
λ-calcul		CCC Lambek 70's
Logique linéaire	Linéarité	Espaces cohérents Girard 88
Logique linéaire différentielle	Sémantique quantitative	Espaces de finitude Erhard 2005
λ-calcul différentiel	Différentiation	Espaces Réflexifs K., Tasson 2013

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe		Sémantique
λ-calcul		CCC Lambek 70's
Logique linéaire	Linéarité	Espaces cohérents Girard 88
Logique linéaire différentielle	Sémantique quantitative	Espaces de finitude Erhard 2005
λ-calcul différentiel	Différentiation	Espaces Réflexifs K., Tasson 2013

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe		Sémantique
λ-calcul		CCC Lambek 70's
Logique linéaire	Linéarité	Espaces cohérents Girard 88
Logique linéaire différentielle	Sémantique quantitative	Espaces de finitude Erhard 2005
λ-calcul différentiel	Différentiation	Espaces Réflexifs K., Tasson 2013

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe		Sémantique
λ-calcul		CCC Lambek 70's
Logique linéaire	Linéarité	Espaces cohérents Girard 88
Logique linéaire différentielle	Sémantique quantitative	Espaces de finitude Erhard 2005
λ-calcul différentiel	Différentiation	Espaces Réflexifs K., Tasson 2013

Un va-et-vient entre Syntaxe et Sémantique

Syntaxe		Sémantique
λ-calcul		CCC Lambek 70's
Logique linéaire	Linéarité	Espaces cohérents Girard 88
λ-calcul différentiel	Sémantique quantitative	Espaces de finitude Erhard 2005
Logique linéaire différentielle	Différentiation	Espaces Réflexifs K., Tasson 2013

La logique linéaire différentielle (DiLL)

Preuves

$P : A \Rightarrow B$ est une preuve non-linéaire de $A \Rightarrow B$

$DP : A \Rightarrow (A \multimap B)$ modélise le comportement linéaire de P en chaque point

Catégorie

$f : E \to F$ est lisse

$Df : E \Rightarrow E \multimap F$ est l'approximation linéaire de f en $x \in E$.

La logique linéaire intègre dans ses règles la possibilité de passer d'une preuve non-linéaire à une preuve linéaire.

La logique linéaire différentielle : un appel à la continuité ...

... Mais :

- La catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues n'est pas cartésienne close.
- On veut une interprétation "continue" des preuves.

La preuve de B à partir de A et $A \rightarrow B$:

$$\begin{cases} E \times E \Rightarrow F \rightarrow F \\ \qquad\qquad x, f \mapsto f(x) \end{cases}$$

La logique linéaire différentielle : un appel à la continuité ...

... Mais :

- La catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues n'est pas cartésienne close.
- On veut une interprétation "continue" des preuves.

La preuve de B à partir de A et $A \to B$:

$$\begin{cases} E \times E \Rightarrow F \to F \\ \qquad\qquad x, f \mapsto f(x) \end{cases}$$

Convergence uniforme sur $E \Rightarrow F$

La logique linéaire différentielle : un appel à la continuité ...

... Mais :

- La catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues n'est pas cartésienne close.
- On veut une interprétation "continue" des preuves.

La preuve de B à partir de A et $A \to B$:

$$\begin{cases} E \times E \Rightarrow F \to F \\ \qquad\qquad x, f \mapsto f(x) \end{cases}$$

Convergence uniforme sur $E \Rightarrow F$

La preuve de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ à partir de A :

$$\begin{cases} E \to (E \Rightarrow F) \Rightarrow F \\ x \mapsto ev_x : x \mapsto (f \mapsto f(x)) \end{cases}$$

La logique linéaire différentielle : un appel à la continuité ...

... Mais :

- La catégorie des espaces topologiques et des fonctions continues n'est pas cartésienne close.
- On veut une interprétation "continue" des preuves.

La preuve de B à partir de A et $A \to B$:

$$\begin{cases} E \times E \Rightarrow F \to F \\ \qquad x, f \mapsto f(x) \end{cases}$$

Convergence uniforme sur $E \Rightarrow F$

La preuve de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ à partir de A :

$$\begin{cases} E \to (E \Rightarrow F) \Rightarrow F \\ x \mapsto ev_x : x \mapsto (f \mapsto f(x)) \end{cases}$$

Convergence simple sur $E \Rightarrow F$

Une solution : utiliser des bornés

Théorème de Banach-Steinhaus

Parmis les fonctions linéaire continues, un ensemble est uniformément bornés *ssi* il est simplement borné.

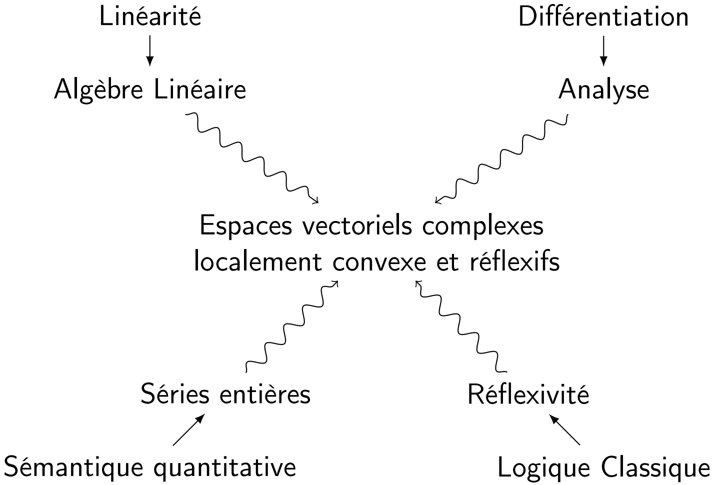
- Lorsqu'un ensemble de fonctions est muni de la topologie de la convergence uniforme, les bornés qui en découlent sont les uniformément bornés :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(E, F), \mathcal{B}(B_E) \subset B_F$$

- Lorsqu'un ensemble de fonctions est muni de la topologie de la convergence simple, les bornés qui en découlent sont les simplement bornés :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(E, F), \mathcal{B}(\{x\}) \subset B_F$$

Une solution : utiliser des evtlc



Bornés dans un evt

Définitions

- B est borné dans un espace vectoriel topologique *ssi* pour tout voisinage U de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $B \subseteq \lambda U$.
- Une fonction est dite bornologique quand elle envoie un borné sur un borné.

Bornés et ouverts

- Entre Banachs, une fonction linéaire est bornologique *ssi* elle est continue.
- Dans un evt, un ouvert n'est pas forcément borné.

Interpréter la logique classique

Logique classique

- Le tiers-exclu est démontrable $A \vee \neg A$.
- De manière équivalente : de $\neg\neg A$, on peut déduire A.

Objet dualisant

En sémantique, cela se traduit par la nécessité d'un objet dualisant $\perp$ tel que $[\neg A] := A \multimap \perp$.

- On veut interpréter $(A \multimap \perp) \multimap \perp \simeq A$.

$[A \multimap \perp] := [A]^{\times} = \mathcal{L}^b([A], \mathbb{C})$, le dual bornologique de E.

Définition

On interprète les formules par des espaces réflexifs : tels que $E^{\times\times} \simeq E$.

Un nouveau modèle de DiLL

$[A \Rightarrow B] = S([A], [B])$

$[A \multimap B] = \mathcal{L}^b([A], [B])$

Séries entières
&, $\oplus$

Espaces réflexifs

Fonctions linéaires
bornologiques $\otimes$, ⅋

Catégorie cartésienne close

Catégorie monoïdale close

Un exemple de conservation de réflexivité : $\mathcal{L}(E,F)$

- $L(E,F)$ est l'espace de toutes les fonctions linéaires de E vers F, muni de la topologie simple.

$$L(E,F)^\times \simeq \oplus_{x\in X}(F_x)^\times = \{\sum f_i \circ ev_{x_i} | f_i \in F^\times, x_i \in E\}$$

$L(E,F)$ est réflexif.

- **Principe de la borne uniforme** : Sur $\mathcal{L}^b(E,F)$, quand E et F sont réflexifs, bornés simples et bornés uniformes correspondent.

$$\mathcal{L}^b(E,F)^\times = \mathcal{L}^b_s(E,F)^\times \text{ et } \mathcal{L}^b_s(E,F) \subset L(E,F)$$

- **Hahn-Banach bornologique** : Toute forme linéaire bornologique sur un sev F de E peut être prolongée en une forme linéaire bornologique sur E.

On peut étendre $\phi \in \mathcal{L}^b(E,F)^\times$ en $\tilde{\phi} \in L(E,F)^\times$

- **Conclusion** :

$$\mathcal{L}^b(E,F)^\times \simeq \{\sum_i^n f_i \circ ev_{x_i} | f_i \in F^\times, x_i \in E\}$$

Proposition

E est réflexif *ssi* $\delta : x \mapsto (l \in E^{\times} \mapsto l(x))$ est surjective de E dans $E^{\times\times}$.

Théorème

Lorsque E et F sont réflexifs, $\mathcal{L}^b(E,F)$ l'est aussi.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^b(E,F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\delta *"'] & \mathcal{L}^b(E,F)^{\times\times} \arrow[d, "\phi"] \\
& \mathcal{L}^b(E,F^{\times\times})
\end{tikzcd}$$

Merci de votre attention !