Rapport de stage

Étude de « Ample Dividing » de David M. Evans Travail sur la (n+1)-ampleur de la structure à n couleurs

Marie Kerjean - L3 mathématiques à l'ENS Lyon -
marie.kerjean@ens-lyon.fr
Réalisé sous la direction de Frank Wagner,
à l'Institut Camille Jordan, Université Lyon I .

Table des matières

1 Travail de compréhension de l'article **3**

1.1 Positionnement de l'article et démarche de D. Evans 3

1.2 Rappels de théorie des modèles 4

1.3 Types et clôture algébrique 4

1.4 Propriétés d'indépendance et de CM-trivialité 5

1.5 Va et vient 6

1.6 Amalgamation et construction de la limite de Fraïssé 7

1.7 Résumé succinct de l'article 8

2 La contingence des couleurs pour obtenir la n-ampleur **8**

2.1 La remarque 2.12 8

2.2 Le raisonnement à une relation de voisinage. 9

2.2.1 Structures orientées 9

2.2.2 Structures réduites 10

Introduction

Ce stage s'est déroulé dans le cadre de la L3 du département mathématiques de l'ENS Lyon. Durant six semaines, j'ai donc travaillé sous la direction de Frank Wagner au sein de l'Institut Camille Jordan de l'université Lyon 1.
Il s'agissait avant tout de comprendre un article de recherche publié il y a 8 ans par D. Evans, de l'UEA, Norwich au Royaume-Uni. Je n'avais vu qu'une introduction à la théorie des modèle en cours de fondement de l'informatique, et cet article à l'avantage de ne pas nécessiter trop de connaissance.

Ensuite, F. Wagner m'avait proposé de travailler sur une conjecture que fait l'auteur dans son article, où il s'agit de montrer qu'avec seulement n-relations de voisinages, la structure étudiée n'est pas $(n+1)$-ample (il suffit de n relations pour rendre la structure n-ample). Cependant, il s'est avéré que les n relations ne sont pas nécessaires, et que seul le prédicat « il existe un chemin entre le sommet a et le sommet b » est indispensable à la n-ampleur, ce qui fausse la conjecture. D. Evans à répondu à cette simplification en reformulant la conjecture, et la condition porte désormais sur l'axiome permettant aux chemins de longueur inférieure à n d'être préservés dans une sous-structure close.
Je remercie Frank Wagner pour le temps qu'il m'a consacré, et sa patience face à mes questions.

1 Travail de compréhension de l'article

Ce travail m'a pris environ 4 semaines. En parallèle, j'ai lu certaines parties de A shorter model theory de Wilfrid Hodges afin de comprendre les bases de la théorie des modèles. Ainsi, j'ai travaillé en premier sur une version pédagogique de l'article [2], traitant uniquement du cas de la 2-ampleur, exposé en 2007 à Lyon, puis sur la version originale de l'article traitant de la n-ampleur [1].

1.1 Positionnement de l'article et démarche de D. Evans

La propriété centrale de l'article est celle de CM-trivialitée d'une structure défini par Ehud Hrushovski dans [4]. Cette notion a ensuite été généralisée par Pillay [6] en une hierarchie, la *n-ampleur* pour $n < \omega$; il a aussi montré que la non CM-trivialité d'une structure équivaut à sa 2-ampleur. Evans cherche dans son article à donner un exemple d'une structure qui soit n-ample pour tout $n < \omega$ et ω-stable. Pour le cas plus simple de la 2-ampleur, Pillay avait déjà fournit un exemple dans [5]. D. Evans argumente qu'il s'agit ici d'une construction assez simple, et donne la généralisation au cas de la n-ampleur pour tout $n < \omega$.

D.Evans construit la structure qui nous intéresse sous la forme d'un réduit non orienté d'une structure orientée. La structure orientée est la structure universelle liée à une certaine théorie assez simple $\mathcal{T}_{\prime}$: on considère $\aleph_0$ relations binaires $V_1(x,y)$, $V_2(x,y)$.... La première théorie qui nous intéresse est celle dont les modèles (des graphes donc) respectent les axiomes suivants : les relations $V_i(x,y)$ sont disjointes, quant on se limite à une relation V_i en particulier chaque sommet a au plus deux descendants, et il n'y a pas de cycle dans le graphe. On note $\mathcal{D}$ la classe des modèles de cette théorie. D. Evans ajoute un axiome qui permet à la notion de chemin d'être préservé par clôture : si deux élément d'un sous-graphe clos d'un graphe de $\mathcal{D}$ sont reliés par un chemin dans le graphe, alors ils sont reliés par un chemin dans le sous-graphe.

Dans cette première partie je vais rapidement exposer les principaux points de théorie de modèles qui étaient nécessaires à la compréhension de l'article, et sur lesquels j'ai travaillé. Je vais également essayer de justifier leur utilité dans l'article, en évitant de retranscrire l'article de D. Evans dans son intégralité. Nous verrons dans la deuxième partie que les différentes relations de voisinage, ainsi que la condition d'acyclitée, ne sont pas nécessaires à la n-ampleur pour tout n de la structure étudiée.

1.2 Rappels de théorie des modèles

Définition 1 **$\mathcal{L}$-structure**
Soit $\mathcal{L}$ la signature d'un langage du premier ordre. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est composée :

- d'un ensemble non vide M ;
- pour chaque symbole de fonction f d'arité k de $\mathcal{L}$, d'une fonction $f^{\mathcal{M}}$: $\mathcal{M}^k \to \mathcal{M}$;
- pour chaque symbole de relation p d'arité k de $\mathcal{L}$, d'une relation $p^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^k$.

Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ valide une formule close ϕ si, une fois que l'on interprète tous les symboles de fonctions et de relations présents dans ϕ par leur image $f^{\mathcal{M}}$ ou $p^{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{M}$, la formule ϕ est vraie. On note alors $\mathcal{M} \vDash \phi$.
Soit $\mathcal{T}$ une théorie du premier ordre. Si $\mathcal{M}$ valide tous les axiomes de $\mathcal{T}$, alors on dit que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{T}$, et on note $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$. Le théorème de

correctitude nous dit alors que pour toutes les formules ψ démontrables dans $\mathcal{T}$, $\mathcal{M} \vDash \psi$.

DÉFINITION 2 Homomorphisme
Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux $\mathcal{L}$-structures, et $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. On dit que h est un homomorphisme de $\mathcal{L}$-structures si :

- pour tout symbole de constante c de $\mathcal{L}$, $h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$;
- pour tout $n > 0$, pour tout symbole de fonction f de $\mathcal{L}$ d'arité n, et pour tout n-uplet $\bar{a}$ de $\mathcal{M}$ on a $h(f^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = f^{\mathcal{M}'}(h(\bar{a}))$;
- pour tout $n > 0$, pour tout symbole de relation p de $\mathcal{L}$ d'arité n, et pour tout n-uplet $\bar{a}$ de $\mathcal{M}$, si $\bar{a} \in p^{\mathcal{M}}$ alors $h(\bar{a}) \in p^{\mathcal{M}'}$.

DÉFINITION 3 Plongements et isomorphismes
On dit que h est un plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ si c'est un homomorphisme injectif vérifiant : pour tout $n > 0$, pour tout symbole de relation p de $\mathcal{L}$ d'arité n, pour tout n-uplet $\bar{a}$ de $\mathcal{M}$, on a $\bar{a} \in p^{\mathcal{M}}$ ssi $h(\bar{a}) \in p^{\mathcal{M}'}$. C'est un isomorphisme si en plus d'être un plongement il est surjectif.

1.3 Types et clôture algébrique

DÉFINITION 4 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et soit X un ensemble d'éléments de M. Si $\bar{m}$ est également un n-uplet d'éléments de M, on définit le type complet de $\bar{m}$ sur X par rapport à $\mathcal{M}$ comme étant l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$ à paramètres dans X réalisées par $\bar{m}$. Autrement dit :

$$tp_{\mathcal{M}}(\bar{m}/X) = \{\psi(\bar{z}, \bar{x}), \psi \in \mathcal{L} \text{ et } \mathcal{M} \vDash \psi(\bar{m}, \bar{x})\} \tag{1}$$

où $\bar{x}$ est la liste des éléments de X.

De même, on dit qu'un certain ensemble $p(\bar{x})$ de formules appartenant à $\mathcal{L}$ est un type complet sur X si c'est le type d'un certain n-uplet $\bar{m}$ de $\mathcal{M}$ sur X par rapport à une extension élémentaire de $\mathcal{M}$. Un type est alors un sous-ensemble d'un type complet. C'est un n-type s'il a exactement n variables libres

DÉFINITION 5 Stabilité
Soit $\mathcal{T}$ une théorie complète sur un certain langage $\mathcal{L}$, et κ un cardinal infini. On dit que $\mathcal{T}$ est κ-stable si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$, et toute partie B de M de cardinal κ, le nombre de 1-types sur B est au plus κ.
On dit que $\mathcal{T}$ est stable si elle est κ-stable pour un certain cardinal infini κ.

La notion de stabilité est importante dans l'article, mais faute de temps je n'ai réellement travaillé dessus. En particulier, je n'ai pas travaillé sur la superstabilité de la structure construite par D.Evans, alors que la preuve de superstabilité est selon l'auteur le raisonnement de l'article où la simplification à une couleur et un prédicat pour le chemin ne peut avoir lieu pour obtenir la n-ampleur.

DÉFINITION 6 Saturation
Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et λ un cardinal. On dit que $\mathcal{M}$ est λ-saturé si pour tout sous-ensemble X de M de cardinal inférieur à λ, tous les 1-types complets sur X par rapport à $\mathcal{M}$ sont réalisés par un élement de $\mathcal{M}$.
Une $\mathcal{L}$-stucture $\mathcal{M}$ est dite saturée si elle est $|M|$-saturée.

DÉFINITION 7 Clôture algébrique
Soit A une $\mathcal{L}$-structure et X un sous-ensemble de A. On dit qu'un élement b de A est algébrique sur X s'il existe une suite finie $\bar{a}$ d'élements de X et $\phi(x, \bar{y})$ une formule du premier ordre tels que $A \models \phi(b, \bar{a})$ et si de plus il n'existe qu'un nombre fini d'élements de A vérifiant $\phi(x, \bar{a})$. La clôture algébrique de X dans A est donc l'ensemble des éléments de A qui sont algébriques sur X.

1.4 Propriétés d'indépendance et de CM-trivialité

Nous sommes maintenant en mesure de comprendre les définitions centrales de l'article de D.Evans. Je reprends ici l'exacte définition d'indépendance donnée par D. Evans dans [2].

DÉFINITION 8 Indépendance
Soit $\mathcal{T}$ une théorie complète et stable sur le langage dénombrable $\mathcal{L}$ et $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ une $\mathcal{L}$-formule consistente (c'est à dire réalisée dans un certain modèle de $\mathcal{T}$, $\bar{b}$ étant les paramètres de ϕ). On dit que $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ divise sur C s'il existe un entier k et des réalisations distinctes $(\bar{b}_i, i < \omega)$ de $tp(\bar{b}/C)$ telles qu'aucun k-uplet de formules $\psi(\bar{x}, \bar{b}_i)$ ne soit consistent.
Pour $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$, et $C \subseteq B \subseteq M$ on dit que $tp(\bar{a}/B)$ divise sur C s'il existe $\psi(\bar{x}, \bar{b}) \in tp(\bar{a}/B)$ qui divise sur C.
Et enfin la définition qui nous intéresse : on dit que $\bar{a}$ est indépendant de B par rapport à C, et on écrit $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$, si $tp(\bar{a}/B)$ ne divise pas sur C.

Plus généralement, on écrit $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ si pour chaque n-uplet $\bar{a}$ de A, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$.
Cette définition de l'indépendance est alors symétrique et, heureusement, s'exprime de manière beaucoup plus simple dans les structures étudiées dans l'article.
À partie de là, on peut enfin définir la n-ampleur :

DÉFINITION 9 Trivialité
Soit $\mathcal{T}$ une théorie complète et stable. On dit que $\mathcal{T}$ est triviale si, pour tout modèle de $\mathcal{T}$ et pour tous n-uplets $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ d'éléments de ce modèle qui sont deux à deux indépendants, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} \{\bar{b}, \bar{c}\}$.

Définition 10 CM-trivialité
Soit $\mathcal{T}$ une théorie complète et stable. On dit qu'elle est CM-triviale si pour toutes parties A, B, C d'éléments d'un modèle de $\mathcal{T}$ qui soient algébriquement closes et telles que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A\cap B} B$, on a $A \cap C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A\cap B\cap C} B \cap C$.

Définition 11 n-ampleur
Soit $n \geq 1$. Une théorie complète et stable est dite n-ample si il existe un modèle $\mathcal{M}$ de cette théorie et des élements $a_0, \ldots, a_n$ de ce modèle tels que :
- $a_0 \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|} a_n$;
- $a_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{a_i} a_0 \ldots a_i$ pour $1 \geq i < n$;
- $acl(a_0) \cap acl(a_1) = acl(\emptyset)$;
- $acl(a_0 \ldots a_{i-1} a_i) \cap acl(a_0 \ldots a_{i-1} a_{i+1}) = acl(a_0 \ldots a_{i-1})$ pour $1 \geq i < n$.

Ce rapport de stage se devant d'être court, je ne donne ici que les définitions centrales du travail de compréhension que j'ai effectué.

1.5 Va et vient

Il existe entre $\mathcal{L}$-structures une relation d'équivalence un peu particulière et très intéressante, la relation d'équivalence sous va-et-vient. Il s'agit d'une propriété à mi-chemin entre l'isomorphisme et l'équivalence élémentaires (deux modèles sont élementairement équivalent s'ils valident exactement les mêmes formules closes).
Il est intéressant de savoir que deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables et équivalentes sous va-et-vient sont isomorphes. Il est souvent plus simple de démontrer la équivalence sous va-et-vient, et D. Evans l'utilise à plusieurs reprises.

On peut présenter cette équivalence sous plusieurs formes, en parlant de stratégie gagnante dans un jeu entre deux joueurs : chacun choisi un élément de la structure tour à tour et l'un essaye de faire en sorte que les deux collections ainsi formées soient isomorphes, tandis que l'autre ne le veut pas. Mais par ailleurs, deux $\mathcal{L}$-structures sont équivalentes sous va-et-vient si et seulement si il existe une famille karpienne (ogback-and-forth systemog) entre les deux $\mathcal{L}$-structures. Par souci de brièveté je me contente de la définition suivante :

Définition 12 Famille karpienne
Une famille karpienne entre deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est un ensemble I non vide formé de paires $(\bar{a}, \bar{b})$, où :
- Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$, alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont de mêmes longueur, et sont respectivement formés d'éléments de A et de B ;

– Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$, alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ engendrent des sous-structures isomorphes ;
– Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ et $c \in A$, alors il existe $d \in B$ tel que $(\bar{a}c, \bar{b}d) \in I$;
– Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ et $d \in B$, alors il existe $c \in A$ tel que $(\bar{a}c, \bar{b}d) \in I$.

1.6 Amalgamation et construction de la limite de Fraïssé

Afin de construire la théorie n-ample souhaitée, D.Evans part de la théorie des graphes à n-couleurs, à laquelle il a rajouté un axiome convenable, comme décrit dans l'introduction. Les modèles de cette théorie ont une propriété d'amalgamation : à partir de deux modèles, on peut en construire un troisième vérifiant de bonnes propriétés vis à vis des deux premiers.

Proprement, si D et E sont deux modèles de $\mathcal{T}_0$, et C un sous-graphe de D et de E qui est clos dans E, alors l'amalgame libre de D et E par rapport à C est le nouveau graphe constitué de l'union disjointe de D et E, les seules relations entre les copies de D et E étant celles de C. On montre que cette amalgame libre est un modèle de $\mathcal{T}_0$, et D y est clos.

La structure orientée nous intéressant est construite ensuite comme une limite de Fraïssé :

Proposition 1 Il existe $\mathcal{N}$ un modèle dénombrable de $\mathcal{T}_0$ tel que :

1. $\mathcal{N}$ est l'union d'une chaîne de modèles finis de $\mathcal{T}_0$: $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ où N_i est inclus et clos dans N_{i+1} ;
2. Si C est un sous-graphe clos dans $\mathcal{N}$, et qu'il existe D un modèle fini de $\mathcal{T}_0$ dans lequel C soit également inclus et clos, alors il existe un plongement $f : D \to \mathcal{N}$ qui soit l'identité sur C et tel que $f(D)$ soit clos dans $\mathcal{N}$.

Preuve Il y a un nombre dénombrable de modèles finis de $\mathcal{T}_0$ et donc un nombre dénombrable de paires $C \sqsubseteq D$, où C et D sont des modèles finis de $\mathcal{T}_0$. On les énumère : $(C_i, D_i), \in \mathbb{N}$.
Puis on construit par récurrence la chaîne $N_0 \sqsubseteq N_1 \cdots \sqsubseteq N_n \ldots$, en prenant $N_0 = C_0$. Supposons construits $N_0 \sqsubseteq N_1 \cdots \sqsubseteq N_n$. On énumère alors tous les sous-graphes finis de N_n : $A_0, \ldots, A_k, \ldots$. Pour k fixé, il existe un plus petit $i \in \mathbb{N}$ tel que $A_k = C_i$ et tel qu'il n'existe pas encore de plongement $f : D \to \mathcal{N}$ qui soit l'identité sur C et tel que $f(D)$ soit clos dans $\mathcal{N}_\setminus$. On désigne par i_k cet entier.
Posons dès lors $N_{n+1} = N_n \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} D_{i_k}$, l'amalgame libre de N_n avec chaque D_{i_k} par rapport à A_k. La chaîne souhaitée étant construite, on pose $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. Montrons que cette structure satisfait la seconde propriétée : soit C fini tel

que $C \sqsubseteq \mathcal{N}$ et D un modèle fini de $\mathcal{T}_0$ dans lequel C est clos. Il existe i tel que $C = C_i$ et $D = D_i$. De plus, pour tout m supérieur à un certain n, on a $C \sqsubseteq N_m$. Donc dans la construction des $N_m, m > n$, il arrivera un moment où on posera $A_k = C_i$ et $D_{i_k} = D_i = D$. D est alors librement amalgamé à la structure en cours de construction, et par définition de l'amalgame libre on peut trouver le plongement voulu de D dans $\mathcal{N}$. $\square$

1.7 Résumé succinct de l'article

Dans l'article original comme dans sa version pédagogique, D. Evans expose en premier la version unicolore de la théorie, celle avec une seule relation de voisinage. Il décrit les graphes sur lesquels on travaille, construit $\mathcal{N}$ comme en 1.6, puis axiomatise la théorie $\mathcal{T}_N$ dont $\mathcal{N}$ est un modèle saturé et stable. Puis il passe au réduit : il considère la structure $\mathcal{M}$ qui résulte de $\mathcal{N}$ lorsqu'on oublie les orientations des arrêtes, et que l'on se contente d'une relation de voisinage non-orienté. Il axiomatise également la théorie $\mathcal{T}_M$ de $\mathcal{M}$.
Dès lors, on peut se rendre compte que $\mathcal{T}_N$ est stable, triviale et que $\mathcal{T}_M$, si elle n'est pas triviale, reste stable et CM-triviale. Il s'agit donc d'éviter la CM-trivialité et de rendre la structure 2-ample, voir n-ample.

Pour cela, D. Evans rajoute ω couleurs (ou une seule dans le version pédagogique de l'article), pour obtenir la théorie $\mathcal{T}_0$ décrite en 1.1. Plus important encore, il rajoute un symbole au langage du modèle : on retient l'information $P^{i,r}(a,b)$ s'il existe un chemin de longueur r et passant successivement par les couleurs $i, \ldots i+r-1$ entre a et b. On ne demande pas au chemin d'être orienté. $\mathcal{T}_0$ vérifie également les axiomes suivant pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $r > 1$:
$(\exists a_0, \ldots, a_r(V_i(a_1,a_0) \wedge V_{i+1}(a_1,a_2) \wedge V_{i+2}(a_2,a_3) \wedge \cdots \wedge V_{i+r-1}(a_{r-1},a_r)) \Rightarrow$
$(\exists l \exists \alpha_1 \ldots \alpha_r(V_i(a_0,\alpha_1) \wedge V_{i+1}(\alpha_1,\alpha_2) \wedge \ldots$
$V_{i+l-1}(\alpha_{l-1},\alpha_l) \wedge V_{i+l}(\alpha_{l+1},\alpha_l) \wedge \cdots \wedge V_{i+r-1}(a_r,\alpha_{r-1}))$.
On montre facilement qu'ils permettent au prédicat $P^{i,r}(a,b)$ d'être preservé dans une sous-structure close contenant a et b.

Disposant de cette nouvelle théorie, l'auteur construit de nouveau $\mathcal{N}$et $\mathcal{T}_N$, qui est toujours triviale. Puis on considère la classe $\mathcal{C}$ des réductions des modèles de $\mathcal{T}_0$, comme structures sur la signature $\{W_i, P^{i,r} \mid i < \omega\}$. Il considère ensuite un modèle et saturé de $\mathcal{T}_N$, et sa réduction $\mathcal{M}$, qui sera un modèle saturé de la théorie $\mathcal{T}_M$ de $\mathcal{C}$.

Finalement, un travail sur $\mathcal{M}$ conclut à une condition plus simple suffisante à l'indépendance dans cette structure. À n fixé, il suffit alors de considérer $\{a_0, \ldots, a_n\}$ clos dans $\mathcal{M}$ tels que $W_i(a_i, a_{i+1})$ pour tout $i < n$ et

$P^{i+1,j-i}(a_i, a_j)$ pour tout $j > i$: cette structure vérifie les conditions de n-ampleur, et $\mathcal{M}$ est donc n-ample pour tout n.

REMARQUE L'auteur donne également une manière équivalente de construire la structure universelle pour la théorie unicolore non-orientée : comme une construction dépliée ("uncollapsed") à la Hrushovski.

2 La contingence des couleurs pour obtenir la n-ampleur

2.1 La remarque 2.12

À la fin de l'article, l'auteur fait remarquer qu'au lieu d'un nombre dénombrable de relation, on aurait pu se contenter de n d'entre elles pour obtenir la n-ampleur de $\mathcal{M}$, et conjecture que ces n relations sont nécessaires. L'objectif de ce stage était de le démontrer. Finalement, il se trouve que la démonstration fonctionne tout à fait avec une seule relation $V(x, y)$, avec le prédicat

$$P^n(a, b) \equiv \exists a_1, \dots a_{n-1} W(a, a_1) \wedge W(a_1, a_2) \wedge W(a_{n-1}, b)$$

où $W(x, y) \equiv V(x, y) \vee V(y, x)$, et les axiomes θ_n pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\theta_n :& \exists a_0, \dots, a_r(V(a_1, a_0) \wedge V(a_1, a_2) \wedge V(a_2, a_3) \wedge \cdots \wedge V(a_{r-1}, a_r)) \\ \Rightarrow & (\exists l \exists \alpha_1 \dots \alpha_r, (V(a_0, \alpha_1) \wedge V(\alpha_1, \alpha_2) \wedge \dots V(\alpha_{l-1}, \alpha_l) \\ & \wedge V(\alpha_{l+1}, \alpha_l) \wedge \cdots \wedge V(a_r, \alpha_{r-1}))\end{aligned}$$

Je vais donc dans la suite donner de nouveau le raisonnement de D.Evans, en y faisant les changements mentionnés ci-dessus. La plupart des démonstrations étant exactement les mêmes que dans l'article, je me contenterais de ne détailler que la dernière. Pour les autres, il suffit de se réferer à [1].

2.2 Le raisonnement à une relation de voisinage.

2.2.1 Structures orientées

On travaille avec un langage du premier ordre dont la signature est constitué d'un symbole de relation binaire $V(x, y)$. La classe $\mathcal{C}_0'$ de graphes qui nous intéresse est la suivante : on veut que chaque sommet ai au plus deux descendants. D. Evans a fait remarquer que la condition d'acyclicitée qu'il impose dans [1] et [2] n'est pas nécessaire. Notons enfin $cl'(X)$ la clôture par descendants d'une sous-structure X dans une structure A, et $X \leq A$ pour

signifier que X est clos dans A.
On reprend les définitions de $P^n(a,b)$ et de $W(x,y)$ donnés ci-dessus, et on note $\mathcal{C}'$ la classe de structures contenues dans $\mathcal{C}_0'$ et vérifiant les axiomes θ_n pour tout $n \geq 2$. On note $\mathcal{T}_0'$ la théorie de $\mathcal{C}'$.

Lemme 1 (i) Soit $A \in \mathcal{C}'$ et $a_0, \ldots, a_n$ un chemin de longueur n dans A. Alors

$$\exists l \exists \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}, (V(a_0,\alpha_1) \wedge V(\alpha_1,\alpha_2) \wedge \ldots V(\alpha_{l-1},\alpha_l) \wedge V(\alpha_{l+1},\alpha_l) \wedge \cdots \wedge V(a_r,\alpha_{r-1}))$$

(on appelle ce genre de chemin un bon chemin de a_0 à a_r).
(ii) Si $B \leq A$ et $a,b \in B$, $A \models P^n(a,b) \Leftrightarrow B \models P^n(a,b)$.

Lemme 2 Soit $B, C \in \mathcal{C}'$ et A une sous-structure de B qui est également une sous-structure close dans C. Alors en notant F l'amalgame libre de B et C par rapport à A, on a $F \in \mathcal{C}'$ et $B \leq F$.

Puis il s'agit de trouver la théorie correspondante au $\mathcal{N}$ déjà construit plus haut. On travaille donc sur la théorie $\mathcal{T}'$ consistant des axiomes de $\mathcal{T}_0'$ et de toutes les formules de la forme :

$$\forall \bar{x} \exists \bar{y} (\Delta_X(\bar{x}) \longrightarrow \Delta_{X,A}(\bar{x},\bar{y}) \wedge \text{"} cl'(\bar{x},\bar{y}) = cl'(\bar{x}) \cup \bar{y} \text{"}$$

où $X \leq A$ sont des structures finies de $\mathcal{C}'$, et $\Delta_X(\bar{x})$ ainsi que $\Delta_{X,A}(\bar{x},\bar{y})$ représentent les diagrammes de X et de X, A, respectivement, où $\bar{x}$ sont les variables pour X et $\bar{y}$ celles pour A. La notation "$cl'(\bar{x},\bar{y}) = cl'(\bar{x}) \cup \bar{y}$" s'exprime par une formule du premier ordre pour signifier que tous les descendants d'une variable de $\bar{y}$ est aussi descendant d'une variable de $\bar{x}$.

D. Evans montre que cette théorie est bien celle de $\mathcal{N}$, et conclut après un travail sur cette structure :

Lemme 3 (i) La théorie $\mathcal{T}'$ est consistante et complète. De plus, pour tous $\bar{a}$, $\bar{b}$, n-uplets de modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $\mathcal{T}'$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ ont le même type *ssi* l'application $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ se prolonge en un isomorphisme de $cl'_{\mathcal{M}}(\bar{a})$ sur $cl'_{\mathcal{N}}(\bar{b})$.
(ii) La théorie $\mathcal{T}'$ est stable et triviale. De plus, si A, B, et C sont des ensembles d'élements d'un modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{T}'$, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_C B \Leftrightarrow cl'_{\mathcal{N}}(AC) \cap cl'_{\mathcal{N}}(BC) = cl'_{\mathcal{N}}(C)$.

2.2.2 Structures réduites

On considère la classe $\mathcal{C}$ des réductions de $\mathcal{C}'$, comme structures sur la signature $\{W_i, P^{i,r} | i \in \mathbb{N}\}$. Cette classe n'est pas close par intersection : l'intersection de deux structures de $\mathcal{C}$ n'est pas forcément dans $\mathcal{C}$! De plus, on dit désormais que deux structures de $\mathcal{C}'$ sont équivalentes lorsque leur réduction est la même. Une sous-structure A de $C \in \mathcal{C}$ est dite close dans C s'il existe $C' \in \mathcal{C}'$une orientation de C dans laquelle A est close. On écrit $A \sqsubseteq C$

Le lemme suivant est un lemme classique qui intervient plusieurs fois dans l'article de D. Evans, que l'on travaille sur les structures à plusieurs relations de voisinages ou pas, orientées ou pas.

Lemme 4 (i) Soit $A \leq C \in \mathcal{C}'$ et C_1 la structure obtenue en remplacant A dans C par une structure équivalente A_1. Alors $C_1 \in \mathcal{C}'$.
(ii) Si $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C \in \mathcal{C}$, alors $A \sqsubseteq C$.
(iii) Si $A \sqsubseteq B, C \in \mathcal{C}$ alors l'amalgame libre de B et C par rapport à A est dans $\mathcal{C}$ et B et C y sont clos.

$\mathcal{T}$, la théorie réduite de $\mathcal{T}'$ est plus complexe à axiomatiser. Néamoins, comme $\mathcal{T}'$ est complète et récursivement axiomatisable, il en va de même pour $\mathcal{T}$, qui est donc décidable. On considère donc avec un large modèle saturé de $\mathcal{T}'$, et prend sa reduction $\mathcal{M}$.

Proposition 2 Soit $A \leq \mathcal{N}$ un petit ensemble d'élements de $\mathcal{N}$ et $A_1 \in \mathcal{C}'$ une structure équivalente à A. Notons $\mathcal{N}_1$ la structure obtenue en remplaçant A par A_1 dans $\mathcal{N}$. Alors $\mathcal{N}_1$ est également un modèle saturé de $\mathcal{T}'$.

Corollaire 1 (i) Si A est une petite sous-structure de $\mathcal{M}$, alors $A \sqsubseteq \mathcal{M}$ *ssi* il existe une orientation de $\mathcal{M}$ qui soit un modèle saturé de $\mathcal{T}'$ et dans laquelle A soit close.
(ii) Si A est une petite sous-structure close de $\mathcal{M}$ et $\beta : A \longrightarrow B$ un plongement de A dans une petite structure B de $\mathcal{C}$ tel que $\beta(A) \sqsubseteq B$, alors il existe un plongement $\gamma : B \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $\gamma \circ \beta$ induise l'identitée sur A et que $\gamma(B) \sqsubseteq \mathcal{M}$.
(iii) Si A_1 et A_2 sont des petites sous-structures closes de $\mathcal{M}$ et si $\alpha : A_1 \longrightarrow A_2$ est un isomorphisme, alors il existe une extension de α qui soit un automorphisme de $\mathcal{M}$.

Puis un dernier lemme avant le théorème principal :

Lemme 5 Soit A, B des petites sous-structures de $\mathcal{M}$ telles que :
- $A \cap B \sqsubseteq \mathcal{M}$;
- $A, B \sqsubseteq A \cup B \sqsubseteq \mathcal{M}$, où $A \cup B$ est l'amalgame libre de A et B par rapport à $A \cap B$.

Alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$.

Théorème La structure $\mathcal{M}$ est n-ample pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour le montrer considérons $A = \{a_0, \ldots, a_N, \ldots\} \sqsubseteq \mathcal{M}$ tel que $W(a_i, a_{i+1})$ pour tout i et $P^{|j-i|}(a_i, a_j)$ pour $j \neq i$, sans autres formules atomiques valides sur les A. Alors $a_i \sqsubseteq \mathcal{M}$ pour tout $i \leq n$ et les a_i ont tous le même type sur $\emptyset$. Par ailleurs, les quatres assertions suivantes sont vérifiées pour tout n :
(i) $a_0 \not\perp a_n$;
(ii) $a_n \ldots a_{i+1} \perp_{a_i} a_0 \ldots a_i$ pour $1 \leq i < n$;
(iii) $acl(a_0) \cap acl(a_1) = acl(\emptyset)$;
(iv) $acl(a_0 \ldots a_{i-1} a_i) \cap acl(a_0 \ldots a_{i-1} a_{i+1}) = acl(a_0 \ldots a_{i-1})$ pour $1 \geq i < n$.

Preuve Premièrement, on a $\{a_i\} \sqsubseteq \mathcal{M}$ pour tout $i \leq n$ car l'orientation $V_{(a_0,a_1)}$, …, $V(a_{i-1}, a_i)$, $V(a_{i+1}, a_i)$, …, $V(a_n, a_{n-1})$ est une orientation de A dans laquelle $\{a_i\}$ est clos. Comme $A \sqsubseteq \mathcal{M}$, on peut trouver une orientation de $\mathcal{M}$ dans laquelle $\{a_i\}$ est clos, et le Lemme 4 conclut. L'orientation précedente permet également de montrer que $\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i\} \sqsubseteq A$ et $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_i\} \sqsubseteq A$, et A est donc l'amalgame libre de $\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i\}$ et $\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_i\}$ par rapport à $\{a_i\}$. Le Lemme 5 permet alors de montrer le deuxième point (ii) du théorème.

Concernant le type des a_i, le raisonnement se fait à l'aide du Lemme 4 (iii) : pour i et j distincts, il existe un isomorphisme partiel entre $\{a_i\}$ et $\{a_j\}$. Comme ils sont clos, cet isomorphisme s'étend en un automorphisme de $\mathcal{M}$. Par définition du type, $\{a_i\}$ et $\{a_j\}$ ont le même type sur $\emptyset$.

(i) Comme $\mathcal{M} \models P^n(a_0, a_n)$, (i.e. $P^n(a_0, y) \in tp(a_n\ a_0)$), il suffit de montrer que $P^n(a_0, y)$ divise sur $\emptyset$. On considère un ensemble dénombrable d'éléments $C = \{c_0 \ldots, c_i, \ldots\} \sqsubseteq \mathcal{M}$ tel que $a_0 = c_0$, et qu'aucune relation atomique ne soit validée par C. Il est possible de trouver cette structure C par construction de $\mathcal{N}$, dont $\mathcal{M}$ est la réduction (voir le point 2 de la proposition dans la sous-partie 1.7). Montrons que aucun sous-ensemble de $\{P^n(c_i, y) : i \in \mathbb{N}\}$ de taille supérieure à 2^n n'est réalisé. On considère une orientation de $\mathcal{M}$ dans laquelle C est clos, et $d \in \mathcal{M}$ fixé tel qu'il existe c_i vérifiant $\mathcal{M} \models P^n(c_i, d)$. Par l'axiome θ_n et le lemme 1.(i) qui en résulte, il y a dans C un bon chemin de longueur n entre c_i et d. Or C est clos dans notre orientation, et il n'y a pas de $W(c_j, c_k)$ à être validée par C, donc le bon chemin est forcément dirigé uniquement de d à c_i. Par ailleurs à chaque étape du chemin, il y a au plus deux choix de sommet, chaque sommet ayant au plus deux descendant dans l'orientation de $\mathcal{M}$. Il y au plus 2^n chemins de d à un certain c_i, d'où le résultat recherché.

(iii) Soit $e \in acl(a_0) \cap acl(a_1)$. Il existe une suite infini $c_1, \ldots, c_j, \ldots$ telle

que $W(a_0, c_j)$ pour tout j, que $\{a_0, a_1, c_1, \ldots, c_j, \ldots\} \sqsubseteq \mathcal{M}$ et qu'il n'y ai pas d'autres relations portant sur les c_j sinon celles des chemins induits par $W(a_0, c_j)$. En orientant $\mathcal{M}$ de manière à ce que $V(a_0, a_1)$, $V(c_j, a_0)$ pour tout $j$et $V(a_2, a_1)$, on obtient $\{a_0, a_1\} \sqsubseteq \mathcal{M}$. De même, en échangeant le rôle de a_1 et c_j à j fixé, on a $\{a_0, c_j\} \sqsubseteq \mathcal{M}$, et on peut donc conclure que a_1 et c_j ont même type sur à a_0. Or e est algébrique sur $\{a_0\}$, donc quitte à rÃľordonner les c_j on peut supposer que a_1 et c_1 ont également même type sur à $\{a_0, e\}$. On en déduit que e est algébrique sur $\{c\}$: en effet, soit $\phi(x, y)$ une formule du premier ordre telle que $\mathcal{M} \models \phi(e, a_1)$. Alors $\phi(e, x) \in tp(a_1/e)$, donc $\phi(e, x) \in tp(c/e)$, et $\mathcal{M} \vDash \phi(e, c)$.
Par ailleurs en orientant $\{a_0, a_1, c\}$ de manière à ce que $V(a_0, a_1)$, $V(a_0, c)$, $V(a_2, a_1)$ on obtient $\{c\} \sqsubseteq \{a_1, c\} \sqsubseteq \{a_0, a_1, c\} \sqsubseteq \mathcal{M}$. D'après le lemme 5, on a donc $a_1 \perp c$. Or l'auteur indique dans un lemme que je ne saurais démontrer que pour toute théorie stable, $A \perp_C B$ implique $acl(AC) \cap acl(BC) = acl(C)$. Comme $e \in acl(c) \cap acl(a_1)$, on a $e \in acl(\emptyset)$, ce qui conclut.

(iv) Fixons i. Soit $e \in acl(\bar{a}, a_i) \cap acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1})$. Il existe alors une suite infinie $c_1, \ldots, c_j, \ldots$ telle que $D = \{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, c_1, \ldots, c_i, \ldots\} \sqsubseteq \mathcal{M}$, et telle que $W(a_{i-1}, c_j)$ et $W(c_j, a_{i+1})$ soient vérifiées pour tout j . On suppose de plus que les seules nouvelles relations atomiques validées par D soit les $P^{|j-i|}(a_j, c_k)$ induites par $W(a_{i-1}, c_k)$ et $W(c_k, a_{i+1})$. En orientant D de manière à ce que $V(a_0, a_1)$, ..., $V(a_{i-2}, a_{i-1})$, $V(a_{i-1}, a_i)$, $V(a_i, a_{i+1})$, $V(a_{i+2}, a_{i+1})$ et $V(c_j, a_{i-1}), V(c_j, a_{i+1})$ pour tout j on obtient

$$\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}\} \sqsubseteq D \sqsubseteq \mathcal{M}.$$

De même, en orientant D à j fixé tel que $V(a_0, a_1), \ldots, V(a_{i-2}, a_{i-1}), V(a_{i-1}, c_j)$, $V(c_j, a_{i+1}), V(a_{i+2}, a_{i+1})$ et $V(a_i, a_{i-1}), V(a_i, a_{i+1}), V(c_k, a_{i-1}), V(c_k, a_{i+1})$ pour tout $k \neq j$ on obtient

$$\{a_0, \ldots, a_{i-1}, c_j, a_{i+1}\} \sqsubseteq D \sqsubseteq \mathcal{M},$$

et donc c_j et a_i ont le même type sur $a_0, \ldots, a_{i-1}a_{i+1}$. Comme $e \in acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1})$, on peut supposer quitte à réordonner les c_j que c_1 et a_i ont le même type sur $a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}e$. En raisonnant comme en (ii), on obtient alors que $e \in acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i) \cap acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, c_1)$.

Montrons maintenant que $a \perp_{a_0, \ldots, a_{i-1}} c_1$. En orientant D de manière à ce que $V(a_0, a_1)$, ..., $V(a_{i-2}, a_{i-1})$, $V(a_{i-1}, a_i)$, $V(a_i, a_{i+1})$, $V(a_{i+2}, a_{i+1})$ et $V(a_{i-1}, c_1), V(c_1, a_{i+1})$ on obtient $\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i, c, a_{i+1}\} \sqsubseteq D \sqsubseteq \mathcal{M}$. Comme on a de plus $a_0, \ldots, a_{i-1}c \sqsubseteq \mathcal{M}$ et $a_0, \ldots, a_{i-1}a_i \sqsubseteq \mathcal{M}$, le lemme

5 permet de dire que $a_0, \ldots, a_{i-1}, c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{a_0,\ldots,a_{i-1}} a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i$. On conclut à l'aide de la même propriété qu'en (ii) :

$$acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i) \cap acl(a_0, \ldots, a_{i-1}, c_1) = acl(a_0, \ldots, a_{i-1})$$

et $e \in acl(a_0, \ldots, a_{i-1})$. $\square$

Conclusion

La remarque 2.12 n'a donc plus lieu d'être. Selon D. Evans, on peut la reformuler différement : il conjecture que la théorie précédente, munie des seuls axiomes $\theta_k, k \leq n$, n'est pas $(n+1)$-ample. Il indique également que la preuve de la superstabilité de la structure réduite est fausse lorsque l'on utilise une seule relation de voisinage. Ces deux questions restent donc ouvertes.

D'un point de vue personnel, ce stage m'aura permis de découvrir un peu de théorie des modèles, très différente de ce que j'avais jusque là vu en informatique (à travers l'étude de [7] par exemple). Cela m'a réconcilié avec le travail mathématique, en me permettant d'effectuer une étude approfondi sur un sujet particulier, et de voir que la réfléxion peut porter ses fruits.

Références

[1] David M. Evans, 'Ample Dividing', Journal of Symbolic Logic, Vol. 68, Numéro 4, Décembre 2003.

[2] David M. Evans, 'Model-theoretic constructions via amalgamation and reducts', Notes de 4 exposés présentés à l'école d'été MATHLOGAPS, Aussois.

[3] Wilfrid Hodges, 'A shorter Model Theory', Cambridge University Press, 1997.

[4] Ehud Hrushovski, 'A new strongly minimal set', Annals of Pure and Applied Logic 62 (1993), 147-166.

[5] Andreas Baudisch and Anand Pillay, 'A free pseudospace', J. Symbolic Logic 65 (2000), 443-463.

[6] Anand Pillay, 'A note on CM-triviality and the geometry of forking', J. Symbolic Logic 65 (2000), 474–480.

[7] Danko Ilik, Gyesik Lee, Hugo Herbelin, 'Krikpe Models for Classical Logic', Annals of Pure and Applied Logic 161 (2010), 1367 ?1378