Rapport de stage de M2

Les espaces vectoriels topologiques comme modèle quantitatif de DiLL

Sous la direction de Christine Tasson,
Au Laboratoire PPS, Université Paris Diderot, Paris.
Marie Kerjean - M2 MPRI -
Marie.kerjean@pps.univ-paris-diderot.fr

Introduction

La logique linéaire est un système dont la syntaxe et la sémantique entretiennent des rapports étroits, s'enrichissant l'une l'autre au fil des études. La logique linéaire différentielle est un exemple caractéristique de ce tressage entre syntaxe et sémantique : la possibilité de différentier une preuve fut pressentie à partir d'une étude sémantique de la logique linéaire (les espaces de finitudes de [Ehr05], et les espaces de Kothe de [Ehr02]), et engendra la syntaxe de la logique linéaire différentielle (DiLL) (voir [ER06]). De nouveau, la recherche d'un modèle de DiLL donna naissance aux espaces convenants (voir [BET10]), catégories différentielles et modèles de ILL qui sont le point de départ de mon stage. Le grand intérêt de ces espaces est qu'ils sont d'abord des espaces vectoriels topologiques, et qu'ils ouvrent ainsi la voie à une étude de LL par l'analyse fonctionelle.

La logique linéaire inventée par Girard (voir [Gir87]) est une logique classique où la gestion des ressources est prise en compte. Les preuves peuvent être linéaires (utiliser une seule fois leur hypothèse de départ) ou non-linéaires (utiliser plusieurs fois leur hypothèse de départ). La logique linéaire différentielle intègre le processus de linéarisation d'une preuve : celui-ci correspond, dans la sémantique dénotationelle où une preuve est une fonction, à la différentiation d'une fonction. Les modèles de DiLL sont donc fondalementalement des modèles de LL où l'on peut différentier.

Cela justifie la recherche de modèles de DiLL inspirés de l'analyse fonctionelle ou de la géométrie différentielle : on souhaiterait que la linéarisation d'une preuve corresponde exactement à la différentiation d'une fonction différentiable entre espaces vectoriels. Par ailleurs, depuis ses débuts la logique linéaire entretient un lien fort avec l'algèbre linéaire : travailler avec des espaces vectoriels et des fonctions linéaire réalise ce lien. De plus, la logique linéaire provient d'une étude des preuves comme sommes disjonctives de preuves n-linéaire (voir [Gir88]) : les espaces vectoriels permettent d'écrire nos preuves comme des séries entières, s'accordant ainsi avec la première sémantique de la logique linéaire.

Contributions et contenu du rapport Ce rapport de stage résume les résultats que j'ai obtenus durant mon stage de M2 au laboratoire PPS, sous la direction de Christine Tasson. La partie principale, en français, présente la problématique à laquelle nous avons voulu répondre, et le résultat principal du stage. Celui-ci consiste en la construction d'un modèle de DiLL constitué d'espace vectoriels topologiques réflexifs (où "réflexif" prend ici un sens légèrement différent de celui communément admis). Une des particularités de ces espaces pour qui est habitué à l'analyse fonctionnelle, réside dans le fait que nos fonctions sont bornologiques, c'est-à-dire envoie un borné sur un borné, et non continues. Cela nécessite de réécrire beaucoup de théorèmes. Par ailleurs, il a fallu déterminer quelles séries entières et quelles topologies pouvaient convenir à nos espaces. La troisième annexe, en anglais, détaille ces preuves.

Nous atteignons ce résultat après deux études intermédiaires. Premièrement, on explicite les relations qu'entretiennent les deux définitions d'espace convenant (voir [FK88] et [KM97]). Ainsi, ceux de [BET10] sont basés sur le premier livre, et nous choisirons d'utiliser des espaces qui sont en particulier des espaces convenants du deuxième livre. Cette analyse, détaillée dans la première annexe, n'est pas nécessaires à la compréhension des résultats suivants.

La deuxième annexe expose en anglais le détail d'un résultat intermédiaire, où l'on montre que les espaces vectoriels topologiques complets sont une catégorie différentielle ainsi qu'un modèle de la logique linéaire intuitionniste. Ce résultat répond à la première exigence d'espaces convenants quantitatifs.

Table des matières.

1 La logique linéaire différentielle

1.1 Syntaxe

La logique linéaire est un système où, pour dupliquer une formule, on demande à celle ci d'être marquée. Elle provient de l'étude des espaces cohérents par Girard (voir [Gir88]) : ces espaces sont un modèle dénotationnel de la logique classique, ainsi qu'un modèle d'un langage de programmation (PCF). La logique linéaire est une logique classique, puisque toute formule sera équivalente à sa double négation. La grammaire des formules de la logique linéaire est la suivante :

$$A, B ::= 1|\bot|\top|0|A \parr B|A \otimes B|A \oplus B|A \,\&\, B|!A|?A$$

où $\parr$ est la disjonction multiplicative, $\times$ la conjonction multiplicative, $\oplus$ la disjonction additive et & la conjonction additive. Intuitivement, le connecteur ! permet de marquer une formule qui pourra être dupliquée. Une preuve $!A \vdash B$ est donc une preuve non-linéaire de B sous l'hypothèse A. On définit la négation $A^\perp$ d'une formule A par :

$$\begin{aligned}
(A \,\&\, B)^\perp &= A^\perp \oplus B^\perp & (A \oplus B)^\perp &= A^\perp \,\&\, B^\perp \\
(A \parr B)^\perp &= A^\perp \otimes B^\perp & (A \otimes B)^\perp &= A^\perp \parr B^\perp \\
!A^\perp &=?A^\perp & ?A^\perp &=!A^\perp \\
1^\perp &= \bot & \bot^\perp &= 1 \\
0^\perp &= \top & \top^\perp &= 0
\end{aligned}$$

Cette négation est par définition involutive. Par ailleurs, on voit grâce aux règles de la logique linéaire que 1 est l'élément neutre de $\otimes$, $\bot$ celui de $\parr$, $\top$ celui de & et 0 celui de $\oplus$. On écrit $A \multimap B = A^\perp \parr B$ l'implication linéaire et $A \Rightarrow B =!A \multimap B$ l'implication non-linéaire.

La logique linéaire différentielle a les mêmes formules que la logique linéaire, mais pas les mêmes règles : le groupe exponentiel est modifié (voir la figure 1). On peut déjà remarquer que la règle de co-déréliction permet de transformer une preuve non-linéaire en une preuve linéaire. Les autres règles co-structurelles du groupe exponentiel permettent de faire apparaître un opérateur différentiel sur les preuves. Pour un exposé de la logique linéaire différentielle, on peut lire [Ehr11]. On présente ci-dessous les règles de la logique linéaire différentielle.

1.2 Sémantique de la logique linéaire

Le but de ce stage était de s'inspirer des espaces convenants pour trouver un modèle quantitatif de la logique linéaire, et de la logique linéaire différentielle si possible.

- Groupe identité :

$$\frac{}{\vdash A, A^\perp}\ (\text{axiom}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\text{cut})$$

- Groupe multiplicatif :

$$\frac{}{\vdash 1}\ (1) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\ (\bot)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A_1, A_2}{\vdash \Gamma, A_1 \parr A_2}\ (\parr) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes)$$

- Groupe additif :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\ \top \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\ \&$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A_1}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2}\ \oplus_L \qquad \frac{\vdash \Gamma, A_2}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2}\ \oplus_R$$

- Groupe exponentiel :

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ (\text{contraction}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, !A, !A}{\vdash \Gamma, !A}\ (\text{co-contraction})$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ (\text{affaiblissement}) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, !A}\ (\text{co-affaiblissement})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ (\text{deréliction}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A}\ (\text{co-déreliction})$$

Figure 1: Les règles de DiLL

Nous avions donc besoin de connaître les structure catégoriques qui interprètent nos règles. Pour une description complète de la sémantique dénotationnelle de la logique linéaire, le lecteur peut se réferer à [Mel08].

La sémantique dénotationelle d'une logique consiste à décrire les formules de notre logique par les objets d'une catégorie, et une preuve d'une formule dans un contexte par une flèche entre les objets interprétant respectivement le contexte et la formule. On veut que deux formules soient équivalentes dans notre logique si et seulement si elles ont la même interprétation dans notre catégorie.

Dans la logique linéaire, nous sommes face à deux sortes d'implication (donc de flèches), associées chacune à deux conjonctions différentes. Nous avons l'implication linéaire $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$ et l'implication non-linéaire $A \Rightarrow B = !A \multimap B$. Un modèle de la logique linéaire est informellement une catégorie se comportant bien vis-à-vis de chacune de ces implications. Plusieurs formalisations existent pour la sémantique de la logique linéaire, et nous allons utiliser celle dite de Seely :

Définition 1.1. Une catégorie de Seely est une catégorie monoïdale close $(\mathcal{L}, \otimes, 1)$, munie d'un produit $\times$, d'un objet terminal $\top$, et d'une comonade $(!, \rho, d)$ telle qu'on ait les isomorphismes naturels :

$$m^2_{E,F} : !E \otimes !F \to !(E \,\&\, F) \text{ et } m_0 : 1 \to \top$$

tels que $(!, m) : (\mathcal{L}, \&, \top) \to (\mathcal{L}, \otimes, 1)$ soit un foncteur symmétrique monoïdal.

Théorème 1.2. Voir [Mel08]. Une catégorie de Seely $\star$-autonome est un modèle de la logique linéaire.

Nous cherchons donc une catégorie monoïdale close, $\star$-autonome (c'est-à-dire muni d'une objet $\perp$ telle que $(A \multimap \perp) \multimap \perp) \simeq A$, munie d'une comonade telle que la catégorie de co-Kleisli de cette comonade soit cartésienne close. La dernière condition nous donnera alors l'isomorphisme de Seely demandé dans la définition.

Concrètement, la loi monoïdale modélisera la conjonction multiplicative $\otimes$, et le produit cartésien modélisera la conjonction additive &. Les fonctions de la catégorie de co-Kleisli seront nos preuves non-linéaires, et les fonctions de la première catégorie seront nos preuves linéaires. On confondra désormais une formule et l'objet l'interprétant, ainsi qu'une preuve et la fonction l'interprétant.

Nous cherchons de plus un modèle de la logique linéaire différentielle (voir [Ehr11], partie 4). Nous en avons un lorsque l'on a un modèle de la logique linéaire, muni en plus d'un opérateur de co-déréliction $\bar{d}_A : A \multimap !A$ vérifiant quelques bonnes propriétés. $\bar{d}$ est l'interprétation sémantique de la règle de co-déréliction. Les règles d'affaiblissement, de déréliction et de contraction découlent de la structure de comonade de !. L'interprétation des règles de co-affaiblissement et de co-contraction n'est pas requise, car elle découle de la structure de co-algèbre de $!A$, qui elle même provient du caractère symmétrique monoïdal de !. On a donc déjà une flèche $c_A : !A \otimes !A \multimap !A$ et une flèche $w_A : 1 \multimap !A$. L'opérateur de co-déreliction permet de construire l'opérateur de différentiation qui opérera sur les flèches non-linéaires de la catégorie. En effet, pour une fonction non-linéaire $f : !A \multimap B$, on écrit :

$$Df : A \otimes !A \overset{1\otimes \bar{d}}{\multimap} !A \otimes !A \overset{c_A}{\multimap} !A \overset{f}{\multimap} B$$

Nous sommes donc à la recherche d'une catégorie dont les objets sont des espaces vectoriels linéaires (pour la linéarité algébrique des interprétations des implications linéaires), topologiques (pour qu'il y existe limites et dérivées), munie d'une loi interne $\otimes$ qui la rende monoïdale close pour les fonctions linéaires, d'un produit cartésien, d'un type de fonctions non-linéaires rendant notre catégorie cartésienne, et d'un objet dualisant rendant notre catégorie cartésienne close. Il apparaît que cet objet dualisant ne peut être que l'élement neutre 1 pour $\otimes$ (voir 4.8 dans [Mel08]). Comme il devient dès maintenant évident que $\otimes$ ressemblera au produit tensoriel algébrique bien connu, notre objet dualisant sera le corps des scalaires, et demander à notre catégorie d'être $\star$-autonome revient à demander à ses objets d'être réfléxifs.

1.3 Sémantique quantitative et formule de Taylor

Comme expliqué dans l'introduction, nous voulons plus qu'un modèle de DiLL. Nous voulons un modèle qui s'accorde avec la sémantique quantitative de la logique linéaire. Qu'est ce qu'un modèle quantitatif ? C'est informellement un modèle où chaque fonction non-linéaire peut être décomposée en une somme sur n de fonctions n-linéaires. Cela correspond à une interprétation en terme de ressource de l'évaluation d'un programme (donc d'une preuve, d'après la correspondance de Curry-Howard). En effet, un programme consomme un nombre fini de fois son argument. Un nombre inconnu, mais fini. Lorsqu'il n'utilise qu'une seule fois son argument, on parle d'un programme linéaire. Par extension sémantique, lorsque le programme utilise n-fois son argument, on parle d'un programme n-linéaire. On peut donc écrire tout programme P comme disjonction de programmes n-linéaires :

$$P = \sum_n P_n.$$

Chercher un modèle quantitatif de LL revient à chercher une catégorie de Seely dont les flèches de la catégorie de co-Kleisli vérifient l'égalité ci-dessus. C'est alors que l'on peut faire correspondre les termes utilisés en sémantique de la LL et l'algèbre linéaire. Lorsque les objets de notre catégorie sont des espaces vectoriels, on cherche à écrire toute fonction de la catégorie de co-Kleisli comme une somme de fonctions n-linéaires.

$$f = \sum_n f_n$$

.

Cette égalité prend encore plus de sens lorsque l'on cherche un modèle de DiLL. En effet, la formule ci-dessus s'apparente à la formule de Taylor en analyse fonctionnelle :

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} d^n f(0)(x^n)$$

Lorsque notre modèle comporte un opérateur analogue à la différentielle, on peut chercher à écrire toute preuve comme la somme de ses dérivées n-ièmes. Pour les applications syntaxiques de cette idée, le lecteur peut voir [ER08]. On cherche donc à avoir une catégorie de co-Kleisli où les fonctions sont égales à leur formule de Taylor. On pourra chercher à avoir une égalité locale (en utilisant des fonctions réelles analytiques comme lors de mon stage de M1, ou holomorphes). On parvient ici à avoir des fonctions égales en tout point à leur formule de Taylor en 0, i.e. des séries entières entre espaces vectoriels.

2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Comme nous l'avons dit, nous voulons interpéter nos formules par des espaces vectoriels topologiques. Nous allons demander à ces espaces d'être **séparés** afin de garantir l'unicité de nos dérivées, et **localement convexes** afin de pouvoir utiliser les théorèmes d'Hahn-Banach, de Banach-Steinhauss et surtout la propriété 2.6.

Cette propriété justifie également le fait que l'on travaille avec des bornés et des bornologies : ceux-ci sont beaucoup plus simples dans leur utilisation que les topologies. Les résultats rappelés dans cette partie sont démontrés dans [Jar81] ou [Köt69].

2.1 Topologies et bornologies sur les espaces vectoriels

Définition 2.1. Un **espace vectoriel topologique** E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une topologie (i.e. un ensemble d'ouverts contenant l'espace entier et l'ensemble vide, clos par union quelconque et intersection finie) qui vérifie quelques bonnes propriétés : on veut que l'addition $E \times E \to E$ et la multiplication par un scalaire $E \times \mathbb{K} \to E$ soient continues.

Désormais, toutes les topologies que l'on considèrera sur nos espaces vectoriels seront **séparées**. Par nécessité pour les séries entières, nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Convexité Nous demanderons de plus à nos espaces vectoriels d'être **localement convexes** : ce sont des espaces possédant une base d'ouverts convexes. Comme l'addition est continue, cela revient à demander d'avoir une base de voisinages de 0 convexes.

D'après [Jar81] 6.1.4, nous avons dans ce cas une base de voisinage de 0 **absolument convexe**.

Définition 2.2. Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit absolument convexe lorsque pour tout $x, y \in C$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si $|\lambda|, |\mu| < 1$ alors $\lambda x + \mu y \in C$. Cela revient à dire que C est convexe et équilibré.

L'avantage des ensembles équilibrés (donc des ensembles absolument convexes) est qu'ils nous permettent de faire de l'arithmétique : pour un ensemble absolument convexe, on a par exemple $C + 2C = 3C$, ce qui est faux lorsque l'ensemble n'est pas équilibré.

Proposition 2.1.1. Lorsque U est un ensemble absolument convexe, alors $\bar{U} \subseteq 3U$.

Preuve. Soit $y \in \bar{U}$. Soit $x \in \dot{U}$. Comme U est convexe, on a $[x, y[\subseteq \dot{U}$. Donc en particulier $z = x + \frac{y-x}{2} \in \dot{U}$. Donc $y = 2z - x \in \dot{U}$. □

On note désormais evtlc pour désigner les espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés. Par défaut, E et F désignent ici des evtlc sur $\mathbb{C}$

Définition 2.3. On note E' le dual topologique d'un evtlc E, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$.

On parlera de topologie faible par rapport à E' pour la topologie engendrée par E' sur E.

Bornés et fonctions bornologiques Nous allons beaucoup travailler avec des bornés. Néanmoins, dans un espace qui n'est pas normé, la notion intuitive de "boule" ne peut plus être formalisée. On définit donc nos bornés comme les ensemble qui ne partent pas à l'infini, c'est-à-dire ceux qui peuvent être absorbés par tout voisinage de 0.

Définition 2.4. Un sous-ensemble B de E est dit borné lorsque pour tout voisinage de 0 U, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B \subseteq \lambda U$.

L'ensemble de tous ces bornés forme alors une bornologie sur E, c'est-à-dire une collection de sous-ensembles close par union finie, close à gauche pour l'inclusion et recouvrant E. Pour une description de la théorie des bornologies, le lecteur peut se réferer à [HN77].

Un ensemble qui absorbe tout borné est dit **bornivore**. Le travail de Frölicher et Kriegl, ainsi que de Blute, Ehrhard, et Tasson dans [BET10] portait justement sur les topologies telles que tout bornivore est un voisinage de 0. Comme justifié dans la première annexe, nous nous affranchissons de cette condition ici.

Définition 2.5. Une fonction entre deux evtlc est dite **bornologique** lorsqu'elle envoie un borné sur un borné.

Une fonction linéaire continue est en particulier bornologique, mais l'inverse n'est pas toujours vraie (voir la proposition C.2.7 et la proposition C.2.8). Dans l'optique de travailler avec des fonctions bornologiques, on note $E^\times$ **le dual bornologique** d'un evtlc E, c'est-à-dire l'espace des fonctions linéaires bornologiques de E dans $\mathbb{K}$. Par défaut, parler de toplogie faible sur un evtlc reviendra à parler de la topologie engendrée sur cet espace par son dual bornologique.

Théorème 2.6. Un sous-ensemble B d'un evtlc E est borné si et seulement s'il est scalairement borné, c'est-à-dire si pour tout $l \in E'$ $l(B)$ est borné dans $\mathbb{K}$

Corollaire 2.7. La clôture fermée d'un borné est encore un borné.

Preuve de 2.6. Ceci est une partie du théorème de Mackey-Arens. On peut en trouver une démonstration dans [Sch71], IV.3.2. □

Il en découle que l'on a le même résultat pour $E^\times$, étant donné que toute fonction linéaire continue est bornologique et que tout borné est en particulier envoyé sur un borné par une fonction de $E^\times$. Ainsi, un ensemble B est borné si et seulement si pour tout $l \in E^\times$, $l(B)$ est borné.

2.2 Les théorèmes d'Hahn Banach

Nous présentons maintenant rapidement les conséquences du théorème de Hahn-Banach que nous utiliserons. Le théorème de Hahn-Banach est fondamental dans la théorie des espaces vectoriels topologiques, et est la raison pour laquelle nous travaillerons avec des espaces localement convexes.

Théorème 2.8 (Théorème d'extension de Hahn-Banach)**.** Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, et p une semi-norme sur E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, si u est une forme linéaire sur F bornée par $p_{|F}$, alors il existe $\tilde{u}$ une forme linéaire sur E qui soit bornée par p et telle que $\tilde{u}_{|F} = u$.

Voir [Jar81] 7.2.2 pour la démonstration.

Théorème 2.9 (Théorème de séparation de Hahn-Banach)**.** Soit E un evtlc séparé, et x et y deux points distincts de E. Alors il existe $l \in E'$ telle que $l(x) \neq l(y)$.

Voir [Jar81], 7.2.3 pour la démonstration.

Corollaire 2.10. Soit E un evtlc, A un convexe fermé de E et $x \notin A$, $x \in E$. Il existe alors $u \in E'$ tel que $|u(x)| > 1$ et pour tout $a \in A$ $|u(a)| \leq 1$.

Voir le corollaire 7.3.6 dans [Jar81].

Corollaire 2.11. Soit E un evtcl, A un convexe fermé de E et $x \notin A$, $x \in E$. $x \in E$. Il existe alors $u \in E'$ tel que $|u(x)| > 1$ et pour tout $a \in A$ $|u(a)| = 0$

Proposition 2.2.1. Soit E un evtlc, et C un sous-ensemble convexe de E. Alors C est faiblement fermé par rapport à E' si et seulement s'il est fermé.

Preuve. Un ensemble faiblement fermé par rapport à E' est toujours fortement fermé, car un ouvert faible est en particulier un ouvert fort. Supposons maintenant que C est fortement fermé, et montrons que $E \smallsetminus C$ est faiblement ouvert. Soit $x \notin C$. Comme $\{x\}$ est compact, d'après le théorème d'Hahn-Banach il existe $u \in E'$ et $s > 0$ tel que pour tout C : $Re(u(x)) < s < Re(u(c))$. Donc $E \smallsetminus C$ contient $u^{-1}(]-\infty; s[\times\mathbb{R}$, qui est un voisinge faible de x. $E \smallsetminus C$ est donc faiblement fermé. □

Les théorèmes de Hahn-Banach utilisent classiquement le dual topologique E'. Nous en adaptons quelques uns ci-dessous à l'utilisation de $E^\times$.

Les théorèmes de Hahn-Banach pour $E^\times$

Proposition 2.2.2. Soit E un evtlc, $x \in E$ et B un sous-ensemble convexe et fermé de E. Alors $x \in B$ si et seulement si $l \in E^\times$, $l(x) \in l(B)$.

La démonstration découle de 2.10, et du fait que $E' \subset E^\times$.

On peut également adapter le théorème de prolongement de Hahn-Banach au cas de $E^\times$. Ce théorème est démontré en annexe, voir C.2.5.

Théorème 2.12. Soit E un evtlc, F un sous-espace de E héritant de sa topologie. Alors toute forme linéaire bornologique sur F peut être prolongée en une forme linéaire bornologique sur E.

Polaires et paires duales

Il nous reste à détailler le théorème bipolaire, et pour cela nous introduisons le concept de paire duale.

Définition 2.13. Une paire duale est un triplet $(E; F; <,>)$ où E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $<,>$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans le corps des scalaires. On demande de plus à $<,>$ de vérifier les deux propriétés de séparation suivantes :

- $\forall x \in X \smallsetminus \{0\} \quad \exists y \in Y : \langle x, y \rangle \neq 0$
- $\forall y \in Y \smallsetminus \{0\} \quad \exists x \in X : \langle x, y \rangle \neq 0$

Ainsi, lorsque E est un evtlc séparé, E et E' forment une paire duale. $<,>$ est juste le module de l'application d'une forme linéaire à un élément de E, et les deux propriétés demandées sont vérifiées : la première par séparation, la deuxième par définition de la fonction nulle. Comme $E' \subseteq E^\times$, $(E, E^\times)$ est également une paire duale. De même, $(E^\times, E)$ forme une paire duale, avec $< x, l >= |l(x)|$.

Définition 2.14. Considérons (E_1, E_2) une paire duale, et A un sous ensemble de E_1. Le **polaire** A° de A est le sous-ensemble de E_2 constitué des éléments l tels que : $\forall x \in A, < x, l > \leq 1$.

Pour un exposé sur les polaires, on peut lire [Jar81], chapitre 8.

Si E est un evtlc, le bipolaire $A^{\circ\circ}$ d'un sous-ensemble de E est l'ensemble des élèments $x \in E$ tels que pour tout $l \in A^\circ$, $|l(x)| \leq 1$.

Théorème 2.15 (Théorème Bipolaire)**.** Si E_1, E_2 est une paire duale, E_1 un evtlc, et A un sous-ensemble de E_1, alors $A^{\circ\circ}$ est la clôture fermée absolument convexe de A.

Voir [Sch71] IV.1.5 pour une démonstration de ce théorème. Lorsque $E_2 = E_1'$, le théorème se déduit plus directement du théorème de séparation de Hahn-Banach.

Nous avons maintenant introduit les prérequis nécessaires : nous avons exposé notre but (un modèle quantitatif de DiLL), et notre outil (l'analyse fonctionnelle). Nous présentons maintenant les travaux historiques sur ces questions.

3 Espaces convenants

Cette section est d'abord consacrée à une exposition du travail de Frölicher, Kriegl et Michor dans les deux livres [FK88] et [KM97]. Ils définissent des evtlc particuliers qu'ils qualifient de convenants. Ces livres sont le point de départ du travail effectué dans [BET10], que nous présenterons. Cet article fut à son tour le point de départ de mon stage.

3.1 Les espaces convenants de Frölicher, Kriegl et Michor

Nous exposons le travail effectué par Kriegl et Michor dans le début de [KM97]. Les définitions diffèrent un peu de celles de [FK88] : les espaces convenants de Frölicher et Kriegl sont des evtlc Mackey-complets à la topologie bornologique, alors que ceux de Kriegl et Michor sont plus simplement des evtlc Mackey-complets. Une étude des différences entre ces définitions est faite dans la première annexe.

La Mackey-complétude est une condition sur la convergence de certaines suites de Cauchy, minimale pour beaucoup de propriétés.

Définition 3.1. Un réseau $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ dans E est dit de Mackey-Cauchy s'il existe un borné B de E et un réseau décroissant vers 0 de scalaires $(\lambda_{\gamma,\gamma'})$ tel que pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $x_\gamma - x_{\gamma'} \in \lambda_{\gamma,\gamma'} B$.

Définition 3.2. Un evtlc E est dit Mackey-complet si toute suite de Mackey-Cauchy converge.

Cette condition de complétude a bien d'autres caractérisations, voir [KM97] 2.14, et est parfois appellée complétude locale ("local completeness") dans la littérature. L'intérêt de cette définition est encore une fois de pouvoir travailler sur des bornés. La Mackey-complétude est par exemple suffisante à assurer l'existence de l'intégrale des courbes lipschitziennes sur des bornés de $\mathbb{R}$. Cette définition a cependant un défaut, car elle est trop générale. Je n'ai pas trouvé de contre-exemple pour cette définition : puisqu'être de Mackey-Cauchy est une propriété restrictive, être Mackey-complet est une propriété très générale. Ces espaces vérifient de nombreuses de propriétés intéressantes, dont la proposition 3.1.1 est un exemple. Il s'agit d'une adaptation du théorème de Banach-Steinhauss dont on trouve la démonstration dans [KM97] 5.18.

Proposition 3.1.1. Soit E un espace Mackey-complet et F un evtlc. Alors un ensemble de fonctions linéaires continues bornologiques de E vers F est equiborné si et seulement s'il est borné en tout point de E.

La démonstration de ce fait utilise effectivement le théorème de Banach-Steinhauss pour les espaces de Banach, et le fait qu'un espace Mackey-complet est un evtls tel que tous les espaces normés E_B engendrés par les B bornés absolument convexes sont des espaces de Banach.

Par ailleurs, les suites de Mackey-Cauchy ont l'intérêt d'être preservées par les fonctions bornologiques, et du fait que les bornés sont exactement les scalairement bornés, les suites de Mackey-Cauchy dans la topologie faible sont encore de Mackey-Cauchy dans la topologie forte. Ce sont deux outils que l'on utilisera par exemple dans la preuve de C.4.5 ou de C.3.32.

3.2 Les espaces convenants comme modèle de ILL

Dans leur article [BET10], C.Tasson, R.Blute et T.Ehrhard ont extrait des livres de Frölicher, Kriegl et Michor une catégorie modèle de Ia logique linéaire intuitionniste qui était également une catégorie différentielle. Leurs objets sont des evtlc Mackey-complets à la topologie bornologique, comme dans [FK88]. Ci-dessous se trouve un résumé de leurs constructions, dont sont inspirées la plupart des constructions de l'annexe B, et quelques constructions de l'annexe C.

Objets : evtlc Mackey-complets à la topologie bornologique.
Catégorie monoïdale close *Conv* :

- $E \otimes F$ est le Mackey-complété de $E \otimes F$ muni de la topologie bornologique ayant pour bornés les $B_1 \otimes B_2$, B_1 et B_2 étant des bornés de E et F respectivement.
- $E \multimap F$ est l'espace des fonctions linéaires bornologiques de E vers F, muni de la topologie bornologique ayant pour bornés les ensembles uniformément bornés sur les bornés de E.

Catégorie cartésienne close $Conv_!$:

- $E \times F$ est le produit cartésien de E et F, muni de la topologie produit.
- $E \Rightarrow F$ est l'ensemble des fonctions "lisses"de E vers F, où lisse désigne ici le fait d'envoyer une courbe lisse $c : \mathbb{R} \to E$ sur une courbe lisse $f \circ c : \mathbb{R} \to F$.

Exponentielle $! : Conv \to Conv$ associe à un espace E le plus petit sous-espace convenant de $\mathbb{C}^\infty(E, \mathbb{R})'$ contenant les évaluations ev_x en un point x de E.
Codéréliction $coder_E : E \to !E$ est telle que $coder_E(x) = \lim_{t \to 0} \frac{ev_{tx} - ev_0}{t}$.

Figure 2: Les espaces convenants comme modèle de ILL

4 Espaces réflexifs comme modèle de DiLL

J'expose ici le résultat final de ce stage, et certainement le plus intéressant. On construit un modèle de DiLL constitué d'evtlc réflexifs. Par rapport aux espaces convenants de [BET10], on s'affranchit de la nécessité d'avoir une topologie bornologique, et on utilise comme fonctions non-linéaires non pas des fonctions lisses mais des séries entières. Pour travailler avec ces séries entières nous utilisons la théorie des fonctions holomorphes entre evtlc.

Commençons par un résumé des constructions de notre modèle :

4.1 Espace vectoriels réflexifs

Notre point de départ dans la construction de nos objets est l'exigence d'une catégorie $\star$-autonome, c'est-à-dire une catégorie modélisant l'équivalence en logique classique entre $\neg\neg A$ et A. Comme expliqué dans l'introduction, il apparaît vite que cela revient, lorsque notre formule est modélisée par un espace vectoriel, à demander à notre espace d'être réflexif. Ici, nous utilisons le mot réflexif pour les espaces égaux et isomorphes à leur bidual bornologique, alors que dans la littérature ce mot est d'abord utilisé pour les espaces isomorphes à leur bidual

Objets : Les evtlc complexes tels que $E^{\times\times} = E$.
Catégorie monoïdale close *Lin* :

- $E \otimes F$ est le produit tensoriel algébrique de E et F, muni de la topologie ayant comme bornés les $B_1 \otimes B_2$, où B_1 et B_2 sont bornés dans E et F respectivement.
- $E \multimap F = \mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des fonctions linéaires bornologiques de E vers F, muni de la topologie d'uniforme convergence sur les bornés de E.
- $E \parr F = \mathcal{B}(E^\times \times F^\times, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions bilinéaires bornologiques de $E \times F$ vers $\mathbb{C}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E.
- 1 et $\perp$ sont interprétés par $\mathbb{C}$.

Catégorie cartésienne close *Quant* :

- $E \times F$ est le produit cartésien de E et F, muni de la topologie produit.
- $E \Rightarrow F = S(E, F)$ est l'ensemble des séries entières de E vers F, muni de la toplogie de la convergence uniforme.
- $E \oplus F = E \times \{0\} \bigsqcup \{0\} \times F$ est le biproduit des espaces vectoriels E et F, muni de la topologie engendrée par les voisinages de 0 de E et de F.
- 0 et $\top$ sont interprétés par $\{0\}$.

Exponentielle $! : Lin \to Lin$ associe à un espace E l'evtlc $S(E, \mathbb{C})^\times$.
Codéréliction $coder_E : E \to !E$ est telle que $coder_E(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{ev_{tx} - ev_0}{t}$.

Figure 3: Les espaces réflexifs comme modèle de DiLL

topologique. Beaucoup des propriétés énoncées ici ne sont vraies que dans le cas bornologique, et fausses dans le cas topologique. Toutes les preuves des résultats énoncés ici se trouvent dans l'annexe C.

Définition 4.1. Un evtlc E est dit **réflexif** lorsque $E^{\times\times} = E$, c'est-à-dire lorsque toutes les fonctions de $E^{\times\times}$ sont des évalutations en un point x de E : $ev_x : l \in E^\times \mapsto l(x)$.

Cette égalité point par point suffit à avoir un isomorphisme :

Proposition 4.1.1. Voir la proposition C.1.7. Lorsque qu'un evtlc E est réflexif, on a un isomorphisme bornologique entre E et $E^{\times\times}$.

Par ailleurs ces espaces réflexifs vont être complets dans un certain sens, complétude qui nous suffira à avoir l'intégration et les convergences souhaitées ensuite.

Théorème 4.2. Un evtlc E réflexif est en particulier faiblement quasi-complet, donc Mackey-complet. Voir les propositions C.1.10 et C.1.14.

Ici, le terme faiblement quasi-complet désigne un espace où toutes les suites bornées qui sont de Cauchy pour la topologie engendrée par $E^\times$ convergent.

Théorème 4.3. Soit E un evtlc réflexif. Pour tout borné de E, pour toute fonction bornologique $f : \mathbb{C} \to E$, il existe $v \in E$ tel que pour tout $l \in E^\times$, $l(v) = \int_B l(f(z))dz$. v est l'intégrale faible de f sur B.

Ce théorème est démontré en C.1.16. Il suffit pour le démontrer d'écrire l'intégrale faible comme un élément de $E^{\times\times}$, donc de E car E est réflexif.

4.2 Une catégorie monoïdale close

Nous décrivons dans ce paragraphe Lin, qui est la catégorie des evtlc réflexifs et des fonctions linéaires bornologiques entre eux. Lorsque l'on dira que deux espaces sont isomorphes, ou que l'on écrira $\simeq$, cela signifiera qu'il existe un isomorphisme bornologique entre les deux, donc une fonction inversible dans Lin entre ces deux objets.

Définition 4.4. $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des fonctions linéaires bornologiques entre E et F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E.

Cette topologie est également appelée la topologie des bornés-ouverts, car elle est engendrée par les voisinages de 0 du type :

$$\mathcal{U}_{B,U} = \{l | l(b) \subseteq U\}$$

où B est un borné de E et U un voisinage de 0 dans F.

Théorème 4.5. Lorsque E et F sont réflexifs, $\mathcal{L}(E, F)$ est réflexif.

Ce théorème est démontré en C.2.12. Voici les grandes lignes de cette démonstration :

- On considère l'espace $L_s(E, F)$ des fonctions linéaires entre E et F, muni de la topologie de la convergence simple. On démontre que le dual bornologique de cet espace est égal à $E \otimes F^\times$, c'est-à-dire que tout forme linéaire bornologique sur $L_s(E, F)$ s'écrit comme une somme finie $\sum_{1 \le i \le n} f_i \circ ev_{x_i}$ avec $f_i \in F^\times$ et $x_i \in E$. On en conclut que cet espace est réflexif.

- On considère l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des fonctions linéaires bornologiques entre E et F. Grâce à la propriété 3.1.1, on sait que les bornés dans $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la topologie de sa convergence simple sont exactement les équibornés, donc les bornés de $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés.

- On démontre à l'aide du théorème de Hahn-Banach 2.12 pour les fonctions bornologiques que $L(E,F)$ est dense dans $\mathcal{L}(E,F)$, et cela nous permet de conclure.

Définition 4.6. On définit le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux evtlc comme le produit tensoriel algébrique de E et F muni de la topologie vectorielle ayant comme base de voisinages de 0 les ensembles absorbant tous les $B_1 \otimes B_2$, où B_1 et B_2 sont des ensembles bornés dans E et F respectivement.

Proposition 4.2.1. *$E \otimes F$ est réflexif quand E et F le sont.*

Cette proposition est démontrée en C.2.17. Elle utilise le fait que si le dual est réflexif, alors l'espace lui même l'est également.

Théorème 4.7. *Lin est une catégorie monoïdale close.*

4.3 Une catégorie cartésienne close

La majeure partie du travail présenté ici consiste à introduire la théorie des séries entières entre espaces vectoriels topologiques. Je n'ai pas retrouvé ailleurs les objets utilisés ici, mais les démonstrations s'inspirent de [BS71] et la théorie des fonctions holomorphes entre evtlc se retrouve dans le deuxième chapitre de [KM97] et dans [Gro53]. Nous allons définir la catégorie *Quant* des evtlc réflexifs et des séries entières entre eux, puis montrer que celle-ci est cartésienne close.

Dans $\mathbb{C}$, une série entière est une somme convergente (partout ou sur un disque borné) de la forme $\sum_n a_n z^n$. Ici, nous allons redéfinir la notion de monôme de degré n, à travers les formes n-linéaires.

Définition 4.8. On écrit $\mathcal{L}^n(E,F)$ l'espace des monômes bornologiques de degré n de E vers F, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe une fonction $\tilde{f}$ n-linéaire bornologique de $E \times ... \times E$ vers F vérifiant $f(x) = \tilde{f}(x,...,x)$.

Dans $\mathbb{C}$, une convergence simple (c'est-à-dire en chaque point mais sans condition supplémentaire sur la convergence) d'une série entière implique sa convergence uniforme sur un disque. Cela n'est plus vérifié lorsque l'on passe aux evtlc. Nous allons donc exiger des séries entières que nous utiliserons une convergence uniforme sur les bornés de leur codomaine.

Définition 4.9. Une série entière entre deux evtlc E et F est une somme convergente uniformément sur les bornés $\sum_{n\geq 0} f_n$ de n-monômes bornologiques.

Définition 4.10. On note $S(E,F)$ l'espace des séries entières de E vers F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E.

Proposition 4.3.1. Toute série entière est bornologique.

Cette proposition est une première justification de la cohérence de nos définitions, et est démontrée en C.3.13.

Fonctions holomorphes. Nous reprenons ici la définition d'holomorphie de Kriegl et Michor dans [KM97]. Comme nos espaces ont plus de propriétés que les espaces Mackey-complets, nous pouvons tirer de ces fonctions holomorphes de nouvelles caractéristiques utiles : c'est le cas par exemple de l'inégalité de Cauchy.

Définition 4.11. Une courbe holomorphe dans E est une fonction $c : \mathbb{C} \to E$ partout complexe dérivable. Une fonction holomorphe entre deux evtlc est une fonction envoyant une courbe holomorphe sur une courbe holomorphe.

Théorème 4.12. Une série entière est une fonction holomorphe.

Ce théorème nécessite plusieurs lemmes techniques : il est démontré en C.3.19. Il est néanmoins fondamental, car il nous permet d'accéder à une propriété cruciale des séries entières (démontrée en C.3.27) :

Proposition 4.3.2. Toute série entière $f = \sum_{n\geq 1} \in S(E,F)$ vérifie une formule de Cauchy :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

Cette formule est importante dans la mesure où elle nous permet de borner f_n à partir du comportement de f, et donc de contrôler la convergence de $\sum_n f_n$. La proposition suivante, démontrée en C.3.34, est une illustration de cette possibilité.

Proposition 4.3.3. Si les f_n sont des n-monômes bornologiques dont la somme converge simplement vers une fonction bornologique, alors la convergence de la somme est uniforme sur les bornés de l'espace de départ.

Quant **est une catégorie cartésienne close**

Définition 4.13. $E \times F$ est le produit cartésien de E et F, muni de la topologie produit. $E \oplus F = E \times \{0\} \bigsqcup \{0\} \times F$ est le biproduit des espaces vectoriels E et F, muni de la topologie engendrée par les $U \times \{0\}$ et les $\{0\} \times V$, où U et V sont des voisinages de 0 dans E et F respectivement.

Proposition 4.3.4. Lorsque E et F sont réflexifs, alors $E \times F$ et $E \oplus F$ le sont également.

Cette proposition est démontrée en C.3.23, et repose simplement sur le fait que $(E \times F)^\times = E^\times \oplus F^\times$, et que $(E \oplus F)^\times = E^\times \times F^\times$.

On écrit *Quant* pour la catégorie des espaces réflexifs et des séries entières entre eux. Commençons par vérifier que *Quant* est bien une catégorie.

Théorème 4.14. La composition de deux séries entières est une série entière.

Ce théorème est démontré en C.3.18. Ce résultat utilise un lemme important qui relie la convergence faible d'une série entière à sa convergence forte. Il permet donc de démontrer des résultats de permutation (donc de convergence de certaines séries permutées) dans $\mathbb{C}$, et d'en déduire une convergence dans l'evtlc considéré.

Proposition 4.3.5. Une somme de n-monômes qui converge faiblement vers une fonction bornologique uniformément sur les bornés de E, converge en vérité fortement uniformément sur les bornés de E.

Voir la proposition C.3.32 pour la démonstration, proposition qui nous permet de montrer que *Quant* est cartésienne close, en se ramenant au théorème de Fubini dans $\mathbb{C}$ (voir le théorème C.3.39) :

Théorème 4.15. Pour E, F, G des evtlc réflexifs, on a $S(E \times F, G) \simeq S(E, S(F, G))$.

Il reste à vérifier que lorsque E et F sont réflexifs, $S(E, F)$ l'est aussi. Cela se fait comme pour la réflexivité de $\mathcal{L}(E, F)$, par densité de $L(E, F)^\times$ dans $S(E, F)^\times$ (voir le théorème C.3.37)

Théorème 4.16. *Quant* est une catégorie cartésienne close.

4.4 Exponentielle et codéreliction

Exponentielle. Nous avons notre candidate *Quant* pour la catégorie de co-Kleisli, mais il nous reste à trouver une comonade ! lui correspondant. On veut donc que pour tous espaces réflexifs E et F, $\mathcal{L}(!E, F) \simeq S(E, F)$. Puisque nous voulons des espaces réflexifs, il faut que $!E \simeq (!E)^{\times\times} \simeq S(E, \mathbb{C})^\times$.

Définition 4.17. On note $! : Quant \to Lin$ le foncteur envoyant un espace E sur $S(E,\mathbb{C})^\times$, et une série entière $f \in S(E,F)$ sur :

$$!f : \begin{cases} S(E,\mathbb{C})^\times \to S(F,\mathbb{C})^\times \\ \qquad\qquad \phi \mapsto (g \in S(F,\mathbb{C}) \mapsto \phi(g \circ f)) \end{cases}$$

Par abus de langage, on note également $! : Lin \to Lin$ pour la composition de $!$ avec le foncteur oubli de Lin dans $Quant$. On remarque que cette exponentielle est très différente de celles connues jusqu'ici (dans les espaces de finitudes ou les espaces cohérents par exemple). Elle ne s'écrit non pas comme une accumulation de multi-ensembles finis, mais plutôt comme un ensemble de continuations à valeurs dans l'espace de fonction qui nous intéresse.

Comme lors de la démonstration de C.3.37, on peut décrire les éléments de $S(E,F)^\times$ (voir proposition C.3.38) :

Proposition 4.4.1. Toute forme linéaire de $(S(E,F))^\times$ peut s'écrire comme $\sum\limits_{1 \le i \le n} f_i \circ ev_{x_i}$ avec $f_i \in F^\times$ et $x_i \in E$.

Cette description nous permet d'écrire les transformations naturelles qui accompagnent $!$:

- la co-unité $d_E : !E \to E$ est définie par $d(\lambda ev_x) = \lambda x$ puis étendue linéairement.
- $\rho_E : !E \to !!E$ est définie par $\rho_E(\lambda ev_x) = \lambda ev_{ev_x}$.

$(!, d, \rho)$ forme alors une co-monade. On veut désormais montrer que sa catégorie de co-Kleisli est exactement $Quant$.

Théorème 4.18. Pour tous espaces réflexifs E et F, on a $\mathcal{L}(!E,F) \simeq S(E,F)$.

Ce théorème nécessite une démonstration un peu longue faite en C.4.5. Elle utilise principalement le fait que $\delta : E \to !E$ définie par $\delta(x) = ev_x$ est elle même une série entière.

Pour terminer notre modèle de la logique linéaire, il ne nous reste plus qu'à démontrer l'isomorphisme de Seely, qui découle du fait que $Quant$ est cartésienne close (voir C.4.7 pour une démonstration).

Théorème 4.19. Pour E et F réflexifs, on a $!E \otimes !F \simeq !(E \times F)$

Théorème 4.20. *Lin* muni de $!$ forme une catégorie de Seely $\star$-autonome, donc un modèle de LL.

Codéréliction *Lin* muni de ! forme alors un modèle de $DiLL$. L'unique ingrédient à rajouter est la co-déréliction, qui interprète l'opérateur de différentielle en 0.

Définition 4.21.

$$\bar{d}_E \begin{cases} E \to !E \\ y \mapsto f \in S(E, \mathbb{C}) \mapsto \lim_{x \to 0} \dfrac{f(ty) - f(0)}{t} \end{cases}$$

Dans la partie C.5.2, il est détaillé pourquoi cette définition est juste.

5 Conclusion

Nous obtenons donc un modèle de la logique linéaire composé d'espaces vectoriels topologiques localement convexes, interprétant également la logique linéaire différentielle et de plus en accord avec la sémantique quantitative. Ce résultat peut être vu comme un aboutissement de l'interprétation des liens entre logique linéaire et algèbre linéaire, ou comme un second pas -après les espaces convenants- vers une analogie entre la logique linéaire différentielle et l'analyse fonctionnelle. Ce dernier point de vue est intéressant, car, alors que les espaces cohérents ou les espaces de finitude imposaient un cadre de travail discret, nous sommes désormais confrontés à un modèle dénotationel continu.

Enfin, des progrès restent à faire dans la compréhension même de ce modèle. Y-a-t-il un opérateur d'itération ? Dans quelle mesure ces espaces aident-t-il à comprendre l'ajout à la logique linéaire d'un opérateur d'intégration ("anti-derivative" dans [Ehr11]) ? Quel est le sens de l'exponentielle que nous utilisons ici ? Cette construction est comme nous l'avons écris assez générale, et il serait intéressant de savoir s'il s'agit d'une exponentielle libre.

Remerciements Je tiens d'abord à remercier Christine Tasson de m'avoir mis sur le chemin de la sémantique quantitative, et pour sa très grande disponibilité lors de mon stage. Merci à Thomas Ehrhard, pour ses conseils réguliers. Merci à Paul-André Mellies, de m'avoir donné l'occasion d'exposer mon travail lors du groupe de travail de sémantique.

Merci également à tous les thésards de PPS et à ses visiteurs, et en particulier à mes co-bureaux, pour leur dynamisme et leur conseils. Merci enfin à Tigrane, pour sa relecture de ce document.

Bibliographie

[BCS06] R. F. Blute, J. R. B. Cockett, and R. A. G. Seely. Differential categories. *Math. Structures Comput. Sci.*, 16(6):1049–1083, 2006.

[BET10] Richard Blute, Thomas Ehrhard, and Christine Tasson. A convenient differential category. 06 2010.

[BS71] Jacek Bochnak and Józef Siciak. Analytic functions in topological vector spaces. *Studia Math.*, 39:77–112, 1971.

[Ehr02] Thomas Ehrhard. On Köthe sequence spaces and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12(5):579–623, 2002.

[Ehr05] Thomas Ehrhard. Finiteness spaces. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(4):615–646, 2005.

[Ehr11] Thomas Ehrhard. A model-oriented introduction to differential linear logic. 2011.

[ER06] T. Ehrhard and L. Regnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2):166–195, 2006.

[ER08] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. Uniformity and the Taylor expansion of ordinary lambda-terms. *Theoret. Comput. Sci.*, 403(2-3):347–372, 2008.

[FK88] A. Frölicher and A. Kriegl. *Linear spaces and Differentiation theory.* Wiley, 1988.

[Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

[Gir88] Jean-Yves Girard. Normal functors, power series and λ-calculus. *Ann. Pure Appl. Logic*, 37(2):129–177, 1988.

[Gir99] Jean-Yves Girard. Coherent Banach spaces: a continuous denotational semantics. *Theoret. Comput. Sci.*, 227(1-2):275–297, 1999. Linear logic, I (Tokyo, 1996).

[Gro53] Alexandre Grothendieck. Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I. *J. Reine Angew. Math.*, 192:35–64, 1953.

[Gro73] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordon and Breach Science Publishers, 1973. Traducteur O. Chaljub.

[Hen88] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis*, volume Vol. 1. John Wiley and sons, 1988.

[HN77] Hogbe-Nlend. *Bornologies and Functional Analysis.* 1977.

[Jar81] Hans Jarchow. *Locally convex spaces.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks].

[Kha82] S. M. Khaleelulla. *Counterexamples in topological vector spaces*, volume 936 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[KM97] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Köt69] Gottfried Köthe. *Topological Vector spaces.* Springer, 1969.

[Mel08] P.-A. Melliès. Categorical semantics of linear logic. *Société Mathématique de France*, 2008.

[Sch71] H.H Schaefer. *Topological vector spaces*, volume GTM 3. Springer-Verlag, 1971.

A Espaces convenants dans FK et KM

Le travail fait successivement par Frölicher et Kriegl dans *Linear spaces and Differentiation theory* (abrégé en FK), et par Kriegl et Michor dans *The convenient setting of global analysis* (abrégé en KM) peut sembler différent. Chacun de ces livres choisit sa définition d'espace convenant, et d'espace de fonctions lisses entre deux espaces convenants. On utilise ici les arguments contenus dans FK faisant qu'on obtient plusieurs constructions "équivalentes". Les arguments concernant les caractères bornologiques des duaux ou des topologies sont trouvés tels quels dans FK, ceux concernant la conservation de la Mackey-complétude ont du être trouvés à l'aide des résultats de FK.

A.1 Introduction

Les différents foncteurs sont définis dans le livre de Frölicher et Kriegl, sauf U qui est le foncteur oubli de $Conv$ dans KM. On remarque que tous ils préservent les ensembles et les flèches sous-jacents au catégories concernées. On rappelle ci-dessous leur définition:

- Deux mémentos avant tout: si A et B sont deux sous-ensemble d'un espace vectoriel réel E, on dit que A absorbe B s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\lambda B \in A$. Par ailleurs, B est dit absolument convexe si pour tout $\lambda - 1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$, pour tout $x, y \in B$, on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in B$.
- LCS est la catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes et des fonctions linéaires continues entre ces evtlc (voir 2.1.8 dans FK).
- DVS est la catégorie des espaces dualisés (ie des espaces vectoriels munis d'un sous-ensemble E' de leur dual) et des fonctions linéaires préservant les espaces E' par composition à droite (voir 2.1.1 dans FK).
- CBS est la catégorie des espaces bornologiques convexes (ie un espace vectoriel muni d'une bornologie vectorielle, telle que l'enveloppe convexe d'un borné soit encore bornée) et des fonctions linéaires bornologiques entre ces espaces bornologiques (voir 2.1.2 de FK).
- $\delta_l : LCS \to DVS$ associe à un espace convenant E le FK-espace formé du même espace vectoriel muni de l'espace des formes linéaires bornologiques (voir 2.1.9 dans FK).
- $\mu : DVS \to LCS$ associe à un espace dualisé E ce même espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine telle que E' soit l'espace des formes linéaires continues pour cette topologie. On l'appellera désormais

la Mackey-topologie. Concrètement, le théorème de Mackey-Arens (p.158 Jarchow) nous dit qu'il s'agit de la topologie de la convergence uniforme sur E de tous les disques faiblement-* compacts de E'. μ est un adjoint à gauche de δ_l (voir 2.1.9 dans FK).

- $\beta : LCS \to CBS$ associe à un evtlc ce même espace vectoriel muni de sa bornologie de von Neumann (un ensemble est borné au sens de von Neumann s'il est absorbé par tout voisinage de 0). C'est une bornologie vectorielle convexe. β préserve les flèches de LCS (voir 2.1.10 de FK).
- $\gamma : CBS \to LCS$ construit une certaine topologie τ à partir d'un espace bornologique E muni d'une bornologie $\mathcal{B}$. τ est la topologie vectorielle ayant comme voisinages de 0 les ensembles absolument convexes bornivores. γ préserve les flèches de CBS (voir 2.1.10 dans FK).
- On utilisera également deux foncteurs $\delta_b : CBS \to DVS$ et son adjoint à droite $\sigma_b : DVS \to CBS$. Le premier associe à un espace bornologique cet espace muni de l'ensemble des formes linéaires bornologique sur E, et le second associe à E dualisé la bornologie des ensembles dont l'image par tout élément de E' est borné (voir 2.1.7 dans FK).

$$
\begin{tikzcd}
LCS \arrow[rr, bend left, "\delta_l"] \arrow[dr, bend left, "\beta"] & & DVS \arrow[ll, bend left, "\mu"] \arrow[dl, bend left, "\sigma_b"] \\
& CBS \arrow[ul, bend left, "\gamma"] \arrow[ur, bend left, "\delta_b"] &
\end{tikzcd}
$$

La convexité demandée ci-dessus pour les ouverts d'une topologie ou les bornés d'une bornologie est fondamentale: c'est elle qui aux formes linéaires de ces espaces d'être aussi utiles. On rappelle donc ci-dessous une propriété d'analyse fonctionnelle:

Proposition A.1. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. Un sous-ensemble de E est alors borné (ie absorbé par tout voisinage de 0) *ssi* il est scalairement borné.

A.2 La Mackey-complétude et les espaces convenants

Il s'agit maintenant de distinguer le travail de FK de celui de KM, et d'étudier leurs ressemblances.

Définition A.2. Soit E un espace vectoriel muni d'une bornologie $\mathcal{B}$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Cette suite est dite de *Mackey-Cauchy* s'il existe un réseau $(\lambda_{n,n'})_{n,n'\in\mathbb{N}}$ de réels décroissants vers 0 et un borné $B \in \mathcal{B}$ tels que pour tout $n, n' \in \mathbb{N}$ on ait $x_n - x_{n'} \in \lambda_{n,n'}B$ (voir 2.1 dans KM et 2.2.13 dans FK).

Définition A.3. Un *KM espace* est un espace vectoriel topologique séparé localement convexe c^∞-complet, au sens où toute séquence de Mackey-Cauchy converge pour la topologie τ de E (2.14 dans MK). Ici, le critère de Mackey-Cauchy est donné vis à vis de la bornologie des ensembles absorbés par tout voisinage de 0.

Définition A.4. On appelle *FK espace* un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$), muni d'un certain sous-espace E' inclue dans le dual de E, tel que E' est invariant par $\delta_b \circ \sigma_b$, sépare les points de E, et telle que toute suite de Mackey-Cauchy converge faiblement. Ici, le critère de Mackey-cauchy est donné vis-à-vis de la bornologie de $\sigma_b(E)$.

On obtient donc deux catégories: KM dont les objets sont les KM espaces et les flèches les fonctions linéaires continues entres KM espaces, et FK dont les objets sont les FK espaces et les flèches sont les fonctions linéaire $m : E_1 \to E_2$ telles que $m^\star(E_2') \subseteq E_1'$. Chacune est une sous-catégories pleine de respectivement LCS et DVS.
On construit une nouvelle définition d'espace convenants, qui est celle utilisée par Blute, Ehrhard et Tasson dans leur article.

Définition A.5. Un *espace convenant* est un espace vectoriel topologique localement convexe, dont la topologie est bornologique et séparée, et tel que toute suite de Mackey-Cauchy dans E converge. On construit la catégorie $Conv$ des espaces convenants et des fonctions linéaires bornologiques entre espace convenants. Il s'agit d'une sous-catégorie pleine de LCS.

Ainsi, parmi ces espaces, deux vivent dans LCS, un dans DVS. Notre but est désormais de montrer que le diagramme ci-dessous commute, et que les paires de foncteurs qui y sont décrite forment des adjonctions. Pour faire cela, nous détaillons dans le reste de cette section quelques outils, puis nous effectuons la section 1.2 un passage nécessaire par les espaces bornologique complet, pour démontrer en section 1.3 que les flèches du diagramme sont bien définies et en 1.4 que les paires de foncteurs forment des adjonctions.

$$\begin{tikzcd}
FK \arrow[r, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "\mu"] & Conv \arrow[l, shift right, "\delta_l"'] \arrow[dl, shift left, "U"] \\
KM \arrow[u, shift left, "\delta_b\circ\beta"] \arrow[ur, shift left, "\gamma\circ\beta"] &
\end{tikzcd}$$

Proposition A.6. Il y a dans la prop2osition 2.1.21 de FK quatre figures majeures. Elles ont comme objet ou image des éléments de DVS, CBS ou LCS: on travaille sur des espaces vectoriel muni d'un dual, d'une bornologie ou d'une topologie, mais dans tous les cas convexe. On y apprend les quatre égalités suivantes:

- $\sigma_b \circ \delta_l = \beta$. Ce n'est qu'une reformulation de la prop2osition 1.
- $\delta_l \circ \gamma = \delta_b$.
- $\beta \circ \mu = \sigma_b$. Être borné pour la bornologie de von Neumann associée à la Mackey-topologie est la même chose qu'être scalairement borné.
- $\mu \circ \delta_b = \gamma$. Dans un espace vectoriel bornologique convexe, il équivaut pour un ensemble absolument convexe d'être bornivore ou d'être un voisinage dans la Mackey-topologie associée à l'ensemble des fonctions linéaires bornologiques.

On remarque que l'on a de plus les deux inclusions suivantes, que l'on démontre facilement:

Lemme A.7.

1. La topologie de $E \in LCS$ est contenue dans celle de $\gamma(\beta(E))$.
2. La bornologie de $E \in CBS$ est contenue dans celle de $\beta(\gamma(E))$

Proof. Démontrons par exemple la première inclusion: un voisinage de 0 dans $E \in LCS$ absorbe tout borné de $\beta(E)$. Or les voisinages de 0 de $\gamma(\beta(E))$ sont exactement ceux qui absorbent tous les bornés de $\beta(E)$. Comme les deux topologies considérées sont vectorielles, on en déduit que celle de E est contenue dans celle de $\gamma(\beta(E))$. □

Ce premier lemme nous permet de montrer un second, plus utilisé:

Lemme A.8.

1. Pour tout $E \in CBS$, on a $\gamma(E) = \gamma(\beta(\gamma(E)))$.
2. Pour tout $E \in LCS$, on a $\beta(E) = \beta(\gamma(\beta(E)))$.

Proof. En utilisant (1) du lemme 1, on a que la topologie de E est contenue dans celle de $\beta(\gamma(E))$, donc la bornologie de $\gamma(\beta(\gamma(E)))$ est contenue dans celle de $\gamma(E)$. Un borné absorbé par tout ouvert de $\beta(\gamma(E))$ est en particulier absorbé par tout ouvert de E. De plus, l'inclusion (2) du lemme 1 nous dit que la bornologie de $\gamma(E)$ est contenue dans celle de $\gamma \circ \beta(\gamma(E))$. On a donc l'égalité des bornologie, et comme γ et β préservent les espaces et flèches sous-jacentes de leur élément de départ, nous avons: $\gamma(E) = \gamma(\beta(\gamma(E)))$.
La deuxième égalité se démontre de manière analogue. □

Une fois ces préliminaires exposés, il faut s'attaquer au diagramme. On explique immédiatement la partie facile: le fait que le diagramme commute.

Proposition A.9. On a bien $(\gamma \circ \beta \circ \mu)(E) = \mu(E)$ pour un FK-espace E, et $\delta_l(\gamma(\beta(F))) = \delta_b(\beta(F))$ pour un KM espace F.

Proof. Montrons la première égalité. $\mu(E)$ est l'espace E muni de la topologie la plus fine telle que $\delta_l \circ \mu(E) = E$. Or $(\gamma \circ \beta \circ \mu)(E)$ porte une topologie plus fine que $\mu(E)$, et, d'après la prop2osition 2, $(\delta_l \circ \gamma \circ \beta \circ \mu)(E) = (\delta_b \circ \beta \circ \mu)(E) = (\gamma \circ \beta \circ \mu)(E) = (\delta_b \circ \sigma_b)(E) = E$ car E est un FK-espace. On a donc forcément $(\gamma \circ \beta \circ \mu)(E) = \mu(E)$.
Pour la deuxième égalité, on a $\delta_l(\gamma(\beta(F))) = \delta_b(\beta(F)) = \delta_b(\sigma_b(\delta_l(F)))$ en appliquant deux fois la prop2osition 2. □

A.3 Les espaces bornologiques complets

Pour montrer que le diagramme est bien définie, les passages de *Conv* vers *FK* ou *KM* pourraient se faire dès maintenant (lemmes 5 et 8 de la section 1.4). Les autres nécessiteront des outils supplémentaires, que nous développons dans cette section. Il s'agit principalement de montrer que la convergence faible des suites de Mackey-Cauchy implique leur convergence. Pour cela, on utilise les espaces bornologiques complets comme décrits par Hogbe-Nlend dans *Bornologies and Functional Analysis* (1977).

Définition A.10. Soit E un espace vectoriel réel et B un sous-ensemble absolument convexe de E. On note E_B le sous-espace vectoriel engendré par B, muni de la norme p_B définie par $p_B(x) = inf\{\lambda > 0, x \in \lambda B\}$ (voir 2.1.15 dans FK, la définition est également dans KM).

Les remarques ci-dessous sont fondamentale pour comprendre l'intérêt des espaces bornologiques complets:

Fait A.11.

S $E \in LCS$, si B est un borné de $\beta(E)$ absolument convexe, alors la convergence d'une suite de E_B dans E_B implique sa convergence dans E: c'est parce que B est absorbé par tout voisinage de 0 dans E.

Fait A.12.

Si $E \in LCS$, une suite $(x_n)_n$ est de Mackey-Cauchy dans E ssi il existe B borné absolument convexe de E tel que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E_B. Elle Mackey-converge dans E ssi il existe un B tel qu'elle converge dans E_B.

Définition A.13. Soit E in CBS. E est dit complet si pour tout borné B', il existe une borné absolument convexe B contenant B' tel que E_B soit un Banach.

Proposition A.14. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. S'équivalent (voir dans 2.2 et 1.6 dans KM):

1. Toute suite de Mackey-Cauchy pour la bornologie de βE converge (ie E $\in$ KM)..
2. $\beta(E)$ est un espace bornologique complet.

Proof. (1) => (2). Soit B' un borné de E. On considère B un borné fermé et absolument convexe contenant B'. Il s'agit de montrer que E_B est un Banach, on choisit donc $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E_B. $(x_n)_n$ est donc de Mackey-Cauchy dans E, donc converge vers $x \in E$. En notant $\lambda_{n,n'} = p_B(x_n - x_{n'})$, ce réseau tend vers 0 et par définition $(x_n - x_{n'}) \in \lambda_{n,n'} B$.
Ainsi, si on choisit $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, n' \geq N$, $(x_n - x_{n'}) \in \epsilon B$. Soit $n \geq N$ fixé: pour tout $n' \geq N$, $(x_n - x_{n'}) \in \epsilon B$ et comme $(x_n - x_{n'})$ converge vers $(x_n - x)$, comme ϵB est fermé, on a $(x_n - x) \in \epsilon B$ pour tout $n \geq N$. Donc $(x_n)_n$ Mackey-converge vers x pour le borné B, donc $x \in E_B$, et la suite converge vers x dans E_B.
(2) => (1). Soit $(x_n)_n$ une suite de Mackey-Cauchy dans E. Cette suite est donc de Cauchy dans un certain $E_{B'}$, et converge donc vers x dans un E_B où $B' \subseteq B$. Or la convergence dans E_B implique la convergence dans E: tout voisinage de 0 absorbe B, et donc absorbe les $x_n - x$ pour n assez grand. E est donc Mackey-complet. □

Corollaire A.15. Si $E \in LCS$, E est Mackey-complet ssi $\beta(E)$ est complet. Ainsi, pour $E \in LCS$, $E \in Conv$ ssi E est invariant par $\gamma \circ \beta$ et si $\beta(E)$ est complet, et $E \in KM$ ssi $\beta(E)$ est complet.

Il faut maintenant montrer que l'équivalence de la prop2osition 4 existe également pour les FK espaces: cela permettra en section 1.4 de prouver que le caractère de Mackey-complétion est préservé lors du passage de FK à $Conv$. En vérité, nous n'avons besoin que d'un seul sens de l'équivalence, celui qui nous dit que si $E \in FK$, alors $\sigma_b(E)$ est un espace bornologique complet (voir la prop2osition 5). Pour y arriver, un premier lemme est nécessaire.

Lemme A.16. Soit E un espace vectoriel dualisé. Soit $(x_n)_n$ une suite faiblement convergente vers $x \in E$, de Mackey-Cauchy envers un certain ensemble B scalairement borné. Alors (x_n) Mackey-converge vers x pour ce même B: il existe λ_n décroissante vers 0 telle que pour tout n, $x_n \in \lambda_n B$.

Proof. On procède comme dans la preuve de prop2osition 4, en supposant sans perte de généralité que B est faiblement clos. □

Proposition A.17. Soit E un espace vectoriel dualisé, dont le dual sépare les points de E. Si toute suite de Mackey-Cauchy converge faiblement dans E, alors $\sigma_b(E)$ est un espace bornologique complet.

Proof. Le résultat se déduit facilement du lemme précédent. En effet, soit B' un borné de $\sigma_b(E)$. On considère B un borné faiblement fermé et absolument convexe contenant B'. Il s'agit de montrer que E_B est une Banach. On prend donc $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E_B, donc de Mackey-Cauchy dans E. Elle converge faiblement, donc converge dans B par le lemme 3.

□

Cette prop2osition est particulièrement utile pour démontrer le fait suivant, à savoir que pour une suite de Mackey-cauchy, converger et converger faiblement sont la même chose.

Corollaire A.18. Soit E un espace vectoriel topologique bornologique localement convexe et séparé. Si toute suite de Mackey-Cauchy (pour la bornologie de $\beta(E)$) converge faiblement (pour $\delta_l(E)$), alors toute suite de Mackey-Cauchy converge.

Proof. On applique la prop2osition 5 à l'espace $\delta_l(E)$. $\sigma_b(\delta_l(E)) = \beta(E)$ est donc complet, donc d'après la prop2osition 3 toute suite de Mackey-cauchy converge dans E. □

Définition A.19. On note *Born* la catégorie des espaces bornologiques convexes, complets, et invariant par $\beta\circ\gamma$ (ie ce sont des espaces bornologiques topologiques).

On vient en fait de démontrer que le diagramme suivant est bien défini. Le fait que les espaces de *Born* soient topologique est nécessaire au fait que le critère de Mackey-Cauchy soit le même lorsque l'on passe de *Born* dans une des autres catégories.

$$\begin{tikzcd}
FK \arrow[dr, shift right, "\sigma_b"'] & & Conv \arrow[dl, shift right, "\beta"'] \\
& Born \arrow[ul, shift right, "\delta_b"'] \arrow[ur, shift right, "\gamma"'] \arrow[d, shift right, "\gamma"'] & \\
& KM \arrow[u, shift right, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

A.4 Les passages entre FK, KM et $Conv$

Il s'agit donc de montrer que le diagramme de la page 3 est bien défini. Le fait qu'il commute est démontré dans le lemme 3. Pour plus de clarté, le voici de nouveau ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
FK \arrow[r, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "\mu"] & Conv \arrow[l, shift right, "\delta_l"'] \arrow[dl, shift left, "U"] \\
KM \arrow[u, shift left, "\delta_b \circ \beta"] \arrow[ur, shift left, "\gamma \circ \beta"] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons séparer les démonstrations concernant la séparabilité des espaces dans FK, KM, ou $Conv$ de celles concernant la Mackey-complétion et les invariances par certains foncteurs. On rappelle qu'un KM-espace ou qu'un espace convenant a par définition une topologie séparé, et que par définition aussi pour $E \in FK$, le dual de E sépare les points de E. On dira dans le dernier cas que $E \in FK$ est séparé.

Proposition A.20.

1. Si $E \in Conv$, alors $\delta_l(E)$ est séparé.
2. Si $E \in FK$, alors la topologie de $\mu(E) \in Conv$ est séparée.
3. Si $E \in KM$, alors $\delta_b \circ \beta(E)$ est séparé.
4. Si $E \in Conv$, la topologie de $U(E)$ est séparée.
5. Si $E \in KM$, alors la topologie de $\gamma \circ \beta(E)$ est séparée.

Proof.

1. $\delta_l(E)$ est séparé: l'espace des formes linéaires continues sur E sépare les points de E.
2. $\mu(E)$ est munie de la topologie localement convexe la plus fine telle que E' soit l'espace des formes linéaires continues pour cette topologie. Or E' sépare les points de E, et la topologie de $\mu(E)$ contient la topologie engendrée par E', donc elle est séparée.
3. D'après la prop2osition 2, $\delta_b \circ \beta(E) = \delta_l(\gamma \circ \beta(E))$. Or le lemme 1 nous dit que la topologie de E est incluse dans celle de $\gamma \circ \beta(E)$, donc cette dernière sépare également les points de E. Par ailleurs, on sait que l'on peut déduire

du théorème d'Hahn-Banach pour les evtlc (i.e. pour les espaces vectoriels topologiques localement convexes) le fait que le dual algébrique d'un evtlc séparé est séparé. Donc $\delta_l(\gamma \circ \beta(E))$ est séparé.

4. C'est clair, car on garde le même espace de départ, et la même topologie sur celui-ci.

5. On procède comme en (3): comme d'après le lemme 1, la topologie de E est incluse dans celle de $\gamma \circ \beta(E)$, cette dernière est également séparée.

□

On peut désormais passer au reste des démonstrations, en utilisant dans chaque lemme et sans la rappeler la prop2osition précédente. On utilise dans deux lemmes les résultats de la section 1.3:

- Dans le lemme 5, pour vérifier le passage de FK à $Conv$ nous avons besoin du fait que la convergence faible de suite de Mackey-Cauchy implique sa convergence (corollaire 2),

- Dans le lemme 6, pour démontrer que si $E\ inKM$ sa bornologisation est Mackey-complète, nous avons besoin du fait que la Mackey-complétude équivaut à la complétude de l'espace bornologique associé (corollaire 1).

Lemme A.21. Si $E \in Conv$, alors $\delta_l(E) \in FK$.

Proof. Soit $E \in Conv$. On a d'après les égalités de la prop2osition 2 $\delta_l(E) = \delta_l(\gamma(\beta(E)) = \delta_l(\gamma(\sigma_b(\delta_l(E)))) = \delta_b(\sigma_b(\delta_l(E)))$. Montrons que le caractère de complétion est préservé: le critère de Mackey-Cauchy dans $\delta_l(E)$ est défini par rapport à la bornologie $\sigma_b(\delta_l(E))$, qui est exactement celle de $\beta(E)$ d'après la prop2osition 2. Or dans E, le critère de Mackey-Cauchy est donné pour la bornologie de $\beta(E)$. Donc toute suite de Mackey-cauchy dans $\delta_l(E)$ est une suite de Mackey-Cauchy dans E, et comme E est Mackey-complet elle converge dans E, donc converge faiblement, donc converge dans $\delta_l E$. □

Lemme A.22. Si $E \in FK$, alors $\mu(E) \in Conv$.

Proof. Soit $E \in FK$. On a d'après la prop2osition 2: $(\gamma(\beta(\mu E)))) = \gamma(\sigma_b(E)) = \mu(\delta_b(\sigma_b(E))) = \mu(E)$ car E est un espace dualisé invariant par $\delta_b(\sigma_b)$. Montrons que le critère de complétion est préservé. Une suite de Mackey-Cauchy dans $\mu(E)$ est également de Mackey-Cauchy dans E car $\beta\mu(E)) = \sigma_b(E)$, donc elle converge dans E. Or par définition de μ [1], la topologie de faible convergence dans $\mu(E)$

[1] Rappelons le, μ associe à un espace dualisé E ce même espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine telle que E' soit l'espace des formes linéaires continues pour cette topologie.

est exactement la topologie de E. Donc toute suite de Mackey-Cauchy dans $\mu(E)$ converge faiblement, donc converge d'après le corollaire 2. $\mu(E)$ est donc Mackey-complet. $\square$

Lemme A.23. Si $E \in KM$, alors $\gamma(\beta(E)) \in Conv$.

Proof. On a $\gamma(\beta(E)) = \gamma(\beta(\gamma(\beta(E))))$ d'après le lemme 2, donc la topologie de $\gamma(\beta(E))$ est bien bornologique, elle reste convexe et séparée. Montrons que $\gamma(\beta(E))$ est Mackey-complet. Comme $E \in KM$, $\beta(E)$ est un espace bornologique complet. Or $\beta(\gamma(\beta(E))) = \beta(E)$ d'après le lemme 2, donc $\beta(\gamma(\beta(E)))$ est un espace bornologique complet, et $\gamma(\beta(E))$ est Mackey-complet d'après la prop2osition 4. $\square$

Lemme A.24. Si $E \in Conv$, alors $U(E) \in KM$

Proof. C'est clair: on ne change ni la topologie, ni la bornologie, donc le critère de Mackey-Cauchy et le critère de convergence restent donc inchangés. $\square$

Lemme A.25. Si $E \in FK$, alors $\mu(E) \in KM$.

Proof. D'après les lemmes 5 et 7. $\square$

Lemme A.26. Si $E \in KM$, alors $\delta_b(\beta(E))) \in FK$.

Proof. On a bien $\delta_b(\sigma_b(\delta_b(\beta(E)))) = \delta_b(\sigma_b(\delta_l(\gamma(\beta(E))))) = \delta_b(\beta(\gamma(\beta(E)))) = \delta_b(\beta(E))$. Il ne reste plus à prouver que le fait que toute suite de Mackey-Cauchy converge.
E et $\delta_b(\beta(E))$ ont le même bornologie: on a en effet $\sigma_b(\delta_b(\beta(E))) = \sigma_b(\delta_l(\gamma(\beta(E)))) = \beta(\gamma(\beta(E))) = \beta(E)$. Par ailleurs, on sait d'après le lemme 6 que $\gamma(\beta(E) = \mu(\delta_b(\beta(E))$ est Mackey-Complet, et possède la même bornologie que E. Donc une suite de Mackey-Cauchy dans $\delta_b\beta(E)))$ est de Mackey-Cauchy dans $\mu(\delta_b(\beta(E))$, donc converge et converge faiblement dans ce même espace, et par définition de μ on voit que cette suite converge dans $\delta_b(\beta(E)$. $\square$

On a donc montré dans les 6 lemmes précédents que les foncteurs étaient bien définis d'objet en objet. Comme les sous-catégories FK, KM, et $Conv$ sont des sous-catégories pleines de DVS ou LCS, les foncteurs considérés sont donc bien définis, et le diagramme de la page 3 est bien défini et commute.

A.5 Adjonctions dans le premier diagramme

Nous avons des adjonctions entre les trois paires de foncteurs présentes dans le diagramme de la page 3.

- Lorsque l'on ne restreint pas δ_l et μ à FK et $Conv$, il est démontré en 2.1.9 du livre de Frolicher et Kriegl que μ est adjoint à gauche de δ. FK et $Conv$ étant des sous-catégories pleines de DVS et LCS respectivement, ce résultat reste vrai pour les restrictions de notre diagramme.

- Montrons que $\mu : FK \to KM$ est adjoint à gauche de $\delta_b \circ \beta : KM \to FK$. D'une part pour $E \in FK$, on a par définition $\delta_b \circ \sigma_b(E) = E$ et $\delta_b \circ \beta \circ \mu(E) = (\delta_b \circ \sigma_b)(E)$ d'après la prop2osition 1. L'unité $id_E : E \to (\delta_b \circ \beta \circ \mu)(E) = E$ est donc bien définie et préserve évidemment le dual de E par composition à droite, donc est une flèche de FK.
  D'autre part, pour $E \in LCS$ et d'après la prop2osition 1 $\mu(\delta_b(\beta(E))) = \gamma(\beta(E))$, or la topologie de $\gamma(\beta(E))$ est plus fine que celle de E, donc la co-unité $\epsilon_E : \gamma(\beta(E)) \to E; x \mapsto x$ est continue, et est une flèche de KM.
  Les trois foncteurs utilisé ici préservant les espaces et flèches des catégories FK ou KM, on vérifie sans peine les équations faisant de μ l'adjoint à gauche de $\delta_b \circ \beta$.

- $U : Conv \to KM$ est adjoint à droite de $\gamma \circ \beta : Conv \to KM$. En effet $id : \gamma \circ \beta(E) \to E$ est continue pour $E \in KM$, et pour $E \in Conv$, sa topologie est celle de $\gamma \circ \beta(E)$, donc $id : E \to \gamma \circ \beta(E)$ est continue.

A.6 Espaces de fonctions lisses

Au delà de ce premier travail, nous avons besoin de comprendre les différences entre le travail fait sur les fonctions lisses par Frölicher et Kriegl, et celui fait sur ces mêmes fonctions par Kriegl et Michor. Les deux ont la même définition un peu particulière des fonctions lisses (ce sont les fonctions qui envoient les courbes lisses sur les courbes lisses), mais ils ne mettent pas à priori la même topologie sur ces espaces. Pour les deux paires d'auteurs, les espaces de fonctions lisses sont pourtant des espaces convenants (dans FK ou dans $Conv$): on verra que l'on peut prolonger le diagramme de la section 1 au cas des espaces de fonctions lisses.

Deux définitions...

Definition A.6.1. Soit $E \in LCS$. Une application $c : \mathbb{R} \to E$ est dite dérivable si en tout point $t \in \mathbb{R}$, la limite $c'(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{c(s)-c(t)}{s-t}$ existe pour la topologie de E

Definition A.6.2. Une courbe lisse est une courbe n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une fonction lisse entre deux espaces vectoriels topologiques est une application envoyant toute courbe lisse de son espace de départ sur une courbe lisse de son espace d'arrivée.

Il se trouve qu'équipé de ces fonctions lisses, les espaces convenants forment la catégorie de co-Kleisli de $Conv$ pour une certaine monade. Cette structure donne naissance à un modèle de la logique linéaire intuitionniste, ainsi qu'à une catégorie différentielle. On retrouve des structures similaires dans les KM-espaces. C'est avec joie que nous découvrons là une nouvelle différence à combler entre le livre de Frolicher et Kriegl et celui de Kriegl et Michor. En effet, la topologie définie sur l'espace des fonctions lisses n'est pas la même, alors qu'elle est fondamentale pour prouver qu'il s'agit d'un espace convenant (respectivement d'un KM-espace), et donc que la catégorie de co-Kleisli considérée est cartésienne close [2].

Topologie de l'espace des courbes lisses dans KM Voir 3.6 dans KM. Soit $E \in KM$. On note $\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E)$ l'espace des courbes lisses dans E, avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de chaque dérivée séparément. Les ouverts pour cette topologie sont les

$$O_{f,\Omega} = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E), \forall k \in \mathbb{N}, \forall K \text{ un compact} \subset \mathbb{R}, \forall x \in K, f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) \in \Omega\}$$

où Ω est un voisinage de 0 dans E, et f une courbe lisse.

Topologie de l'espace des courbes lisses dans FK Voir 4.1.9 et 4.2.2 dans FK. Soit E un FK-espace et $c : \mathbb{R} \to E$ une application. On dit que c est une courbe faiblement lisse si elle est lisse pour la topologie faible sur E. On munit alors $\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, E)$ de la de FK-espace engendré par les δ^i pour tout $i \in \mathbb{N}$ [3]. Les δ^i sont les quotients différentiels d'ordre i:

$$\begin{aligned} \delta^i : \mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, E) &\to CBS(\mathbb{R}^{<i>}, E) \\ c \mapsto \delta^{i-1}c : (t_0, \dots, t_i) &\mapsto \frac{i}{t_0 - t_i}(\delta^{i_1}c(t_0, \dots, t_{i_1}) - \delta^{i_1}c(t_1, \dots, t_i)). \end{aligned}$$

sachant que l'on définit $\delta^0 c = c$ pour tout $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$, et $\mathbb{R}^{<i>}$ comme étant l'ensemble de (i+1)-uplet de réels dont tous les composantes sont deux à deux distinctes.

Topologie de l'espace des fonctions lisses dans KM Voir 3.6 dans KM. Une fonctions $f : E \to F$ entre deux KM-espaces est dite lisse si elle envoie toute courbe lisse de E sur une courbe lisse de F. On note l'ensemble des fonctions lisses de E dans F $\mathcal{C}^\infty_{KM}(E, F)$, on le munit de la structure d'espace vectorielle simple, et de la topologie initiale engendrée par les $c^\star : \mathcal{C}^\infty_{KM}(E, F) \to \mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, F)$, $c \in \mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E)$

[2] Ce dernier résultat étant lui essentiel dans la construction de la monade.

[3] Voir 3.1.2 dans FK: pour ce faire, on prend la structure duale initiale habituelle, puis on la bornologise en appliquant $\delta \circ \sigma_b$.

Topologie de l'espace des fonctions lisses dans FK. Une fonction $f : E \to F$ entre deux KM-espaces est dite lisse si elle envoie toute courbe lisse de E sur une courbe lisse de F. On note l'ensemble des fonctions lisses de E dans F $\mathcal{C}^\infty(E,F)$, on le munit de la structure d'espace vectorielle simple, et de la topologie initiale engendrée par les $c^\star : \mathcal{C}^\infty(E,F) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},F)$, $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},E)$

Lemma A.6.3. Dans FK comme dans KM, un produit fini ou infini d'espaces convenants est convenant.

Lemma A.6.4. Dans FK comme dans KM, un sous-ensemble fermé d'un ensemble Mackey-complet est complet.

Proof. A faire. □

Proposition A.6.5. Les espaces $\mathcal{C}^\infty(E,F)$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},F)$ sont des FK-espaces lorsque $E,F \in FK$, et des KM-espaces lorsque $E,F \in KM$.

Schéma de preuve dans FK (Voir 4.2.10 et 4.4.2 dans FK).

Proof. Attention: ici on utilise la notation CBS là où les auteurs utilise la notation l^∞. On considère les fonctions bornologiques d'une espace dans un autre, quand les auteurs utilisent les l^∞-morphismes, qui sont dans notre cas d'espaces préconvenants exactement les fonctions bornologiques.
$\mathcal{C}^\infty(E,F)$ s'injecte dans $\prod_{c\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},E)} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},F)$. On voit facilement que c'est un sous-ensemble fermé de celui-ci, et d'après les lemmes précédents on n'aurait plus qu'à montrer que les $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},F)$ sont des FK-espaces.
Ils sont préconvenants (ie invariants sous $\sigma_b \circ \delta$) par définition. Il suffit de montrer qu'ils sont complet. Pour cela, on choisit une nouvelle notation, et on note $Lip^k(\mathbb{R},E)$ l'espace des courbes scalairement k fois dérivables, et dont la k-ième dérivée est scalairement localement lipschitzienne, muni de la structure de FK-espace engendré par les δ^i, $i \leq k$. A vrai dire, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},F)$ s'injecte dans $\prod_k Lip^k(\mathbb{R},E)$, et l'image de l'injection est close. Il suffit donc de montrer que $Lip^k(\mathbb{R},E)$ est Mackey-complet. Pour cela, on se réduit au cas $k = 0$ en montrant qu'il y a un isomorphisme de FK-espaces entre $Lip^k(\mathbb{R},E)$ et $E \times Lip^{k+1}(\mathbb{R},E)$: on ne détaille pas l'isomorphisme. Il s'agit bien sûr de l'évaluation en un point et de la différentielle d'une part, et de l'intégration d'autre part, mais cela nécessite de savoir que dans un espace Mackey-complet, on peut intégrer sur un segment une courbe localement lipschitzienne.
Pourquoi $Lip^0(\mathbb{R},E)$ est-il Mackey-complet ? Car il forme un sous-ensemble clos de $E \times CBS(\mathbb{R}^{<1>},E)$ (on lui applique l'injection $ev_0 \times \delta^1$). La dernière étape est donc de montrer que $CBS(\mathbb{R}^{<1>},E)$ est Mackey-complet (la préconvenance vient du fait que E est préconvenant). C'est là que les auteurs nous renvoient à 3.6.1, où l'on explique de manière un peu floue que $CBS(\mathbb{R}^{<1>},E)$ est un sous ensemble

clos d'un produit de l'ensemble l^∞ de l'ensemble des suite bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Ce dernier, muni de la norme de la convergence uniforme, est un Banach, il est donc Mackey-complet [4].

$\square$

Schéma de preuve dans KM. Voir 3.6 et 3.11.

Proof. De même que dans FK, on considère $\mathcal{C}^\infty_{KM}(E,F)$ s'injecte dans $\prod_{c\in\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R},E)} \mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R},F)$, et qu'il résulte en un sous-ensemble clos. Il suffit donc de montrer que les espaces de courbes lisses sont des KM-espace.
Soit E un KM-espace. Alors $\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R},E)$ s'injecte dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} CBS(\mathbb{R},E)$ par l'application qui a une courbe associe la suite de ses dérivées. On munit ici $CBS(\mathbb{R},E)$ de la topologique de la convergence uniforme sur tout les compacts. L'image de cette injection est close: considérons pour le démontrer une suite (c_k) de courbe bornologiques dans E, tel que pour tout n $\lim_{k\to\infty} c_k^{(n)} = c$, où c^n est une courbe bornologique dans E. Il faut montrer que c^0 est lisse et que pour tout n, $c^n = (c^0)^{(n)}$. Il suffit de montrer ce cas là localement en tout point de $\mathbb{R}$. Fixons-nous $t_0 \in \mathbb{R}$ Pour le cas $n = 1$ par exemple, définissons

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \neq t_0 \mapsto \delta(c^0)(t,t_0) \\ t_0 \mapsto c^1(t_0) \end{cases}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\gamma_k : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \neq t_0 \mapsto \delta(c_k^{(0)}(t,t_0) \\ t_0 \mapsto c_k^{(1)}(t_0) \end{cases}$$

Comme E est Mackey-complet, on peut intégrer $c_k^{(1)}$ sur $[0;1]$, et pour tout t, $\gamma_k(t) = \int_0^1 c_k^{(1)}(t_0 + \lambda(t-t_0))\,\mathrm{d}\lambda$. Donc γ_k converge vers $\int_0^1 c^{(1)}(t_0+\lambda(t-t_0))\,\mathrm{d}\lambda$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, γ_k converge aussi simplement vers γ sur $\mathbb{R}$. Donc $\gamma = \int_0^1 c^{(1)}(t_0+\lambda(t-t_0))\,\mathrm{d}\lambda$, c^0 est dérivable en t_0 de dérivée $c^1(t_0)$. On fait de même pour tout n et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $CBS(\mathbb{R},E)$ est Mackey-complet (voir 2.15 dans KM). On passe pour ça par les espaces bornologiques: on veut montrer que pour tout borné $\mathcal{B}$ de cet espace, $CBS(\mathbb{R},E)_\mathcal{B}$ est un Banach. Or que sont les bornés de Von Neumann associés à la topologie de la convergence sur tout les

[4] Voir 1.2.12 dans FK: la structure de FK-espace de $CBS(X,E)$ est engendrée par les $l^\infty(c,l) : l^\infty(X,E) \to l^\infty$, pour $c \in l^\infty(\mathbb{N},X), l \in E'$

compacts ? On voit vite qu'il s'agit des ensemble de fonctions envoyant tout borné de $\mathbb{R}$ sur un borné de $\mathbb{R}$.

On montre d'abord que si D est un borné de $\mathbb{R}$, alors $CBS(D,E)$ est Mackey-complet. En effet, si on considère un borné $\mathcal{B}$, $CBS(D,E)_{\mathcal{B}}$ est l'ensemble des fonctions envoyant D sur un borné de E, que l'on note B. En se rappelant que la norme sur E_B est $p_B(x) = \sup_{\lambda x \in B} \lambda$ on voit que pour $f \in CBS(D,E)_{\mathcal{B}}$, $p_{\mathcal{B}}(f) = \sup_{x \in D} p_B(f(x))$. Cela nous donne une isométrie entre $CBS(D,E)_{\mathcal{B}}$ et $CBS(D,E_B)$. Or il est connue que lorsque Y est un Banach, l'ensemble des fonctions allant d'un borné vers ce Banach est lui même un Banach. Ceci étant valable pour tout $\mathcal{B}$, $CBS(D,E)$ est Mackey-complet.

Que se passe-t-il dans le cas général ? La topologie de la convergence uniforme sur tout compact fait que $CBS(\mathbb{R},E)$ s'injecte dans $\prod_D CBS(D,E)$. Il suffit de montrer l'image de cette injection est close, ce qui se fait facilement. $\square$

... qui s'équivalent

Il s'agit de montrer que sur les espaces de fonctions lisses, on a dans KM et dans FK les mêmes topologies à une bornologification près. Il suffit de montrer le résultat pour les espaces de courbes, étant donné que les espaces de fonctions dans KM ou FK sont construits de la même manière à partir de leur espaces de courbes.
Il y a dans FK un point flou, celui de la topologie sur l'espace $l^\infty(X,E)$ lorsque E est un espace convenant, et X un l^∞-espace. C'est la bornologification de la topologie initiale engendrée par les $l^\infty(c,l) : l^\infty(X,E) \to l^\infty$, pour $c \in l^\infty(\mathbb{N},X), l \in E'$. Elle provient donc de la topologie dont est dotée l^∞. Celle ci n'est jamais explicitée clairement dans FK. Lors de la démonstration de la Mackey-complétude de $l^\infty(X,E)$, il est juste fait référence au fait que l'on dote l^∞ de la bornologie de l'uniforme convergence sur les bornés(voir la remarque après 1.2.10). Sa topologie, si elle doit être bornologique, serait donc la topologie de l'uniforme convergence sur les bornés, utilisée dans KM. Il en va donc de même sur $l^\infty(\mathbb{N},E)$, vu que les bornés de E sont les scalairement bornés (ici, comme il est précisé en 1.2.8 de FK, tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est considéré comme borné, y compris $\mathbb{N}$ lui-même). D'après le définition des bornés dans un l^∞-espace, on obtient alors la topologie de la convergence uniforme sur $l^\infty(X,E)$ (à détailler éventuellement).
Plus simplement, on peut comprendre la remarque après 1.2.10 comme disant que la bornologie de $l^\infty(X,Y)$ est la bornologie de la convergence uniforme sur tout borné de X. C'est ce que nous voulons, pour identifier la topologie découlant de cette bornologie comme étant la bornologie de la convergence uniforme sur tout borné de X, celle utilisée dans KM. [5].

[5] Rappel: Si X est un ensemble muni d'une bornologie, E un espace vectoriel topologique, la topologie de l'uniforme convergence sur les bornés de l'espace $CBS(X,E)$ a pour base de

Nous allons nous contenter de montrer que lorsque E est un FK-espace, lorsque qu'on lui considère le KM-espace $\mu(E)$ associé, alors $\gamma\circ\beta(\mathcal{C}^{\infty}_{KM}(\mathbb{R},\mu(E)))$ s'injecte continument dans $\mathcal{C}^{\infty}_{FK}(\mathbb{R},E)$. Auparavant, on fait un détour par la définition des courbes fortement dérivables dans les FK espaces, notion qui pourrait peur-être servir à montrer que si E est un KM-espace $\gamma\circ\beta(\mathcal{C}^{\infty}_{KM}(\mathbb{R},(E))) = \mathcal{C}^{\infty}_{FK}(\mathbb{R},\gamma\circ\beta(E))$.

Courbes fortement dérivables dans FK

Soit E un FK-espace et $c:\mathbb{R}\to E$ une application. On dit que c est fortement dérivable si la limite $c'(t) = \lim\limits_{s\to t}\frac{c(s)-c(t)}{s-t}$ existe (converge faiblement) et si le quotient converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. On dit qu'une courbe est fortement lisse si elle est fortement dérivable et si sa dérivée est elle même fortement lisse.

Proposition A.6.6. Théorème 4.1.13 de FK. Soit E un FK espace et c une courbe dans E. S'équivalent:
(1) c est une courbe faiblement lisse
(2) c est une courbe fortement lisse.

La démonstration de cette proposition nécessite plusieurs outils:

Definition A.6.7. On rappelle la définition de locale lipschitziniaté: une courbe r: soit E un evtlc, c une courbe sur E. On dit que c est localement lipschitzienne si pour tout $r\in\mathbb{R}$, il existe un voisinage U de r tel que l'ensemble suivant soit borné:

$$\{\tfrac{c(s)-c(t)}{s-t}|s,t\in U, s\neq u\}$$

Lemma A.6.8. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable de dérivée localement lipschitzienne, alors $\delta^2(f)$ est bornologique.

Proof. Preuve du lemme 10.
On remarque que $\delta^1(f)(s,t) = \int_0^1 f'(s+\lambda(t-s))\,\mathrm{d}\lambda$. f' étant localement lipschitzienne elle est continue, donc $\delta^1(f)$ est dérivable, donc localement lipsichitzienne sur $\mathbb{R}^{<1>}$ (et se prolonge d'ailleurs en une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$). Si l'on considère un borné B de $\mathbb{R}$, la fermeture de ce borné étant compact, $\delta^2(s,t,r) = \frac{1}{t-r}(\delta^1(s,t)-\delta^1(s,r))$ reste borné pour $s,t,r\in B$. □

Lemma A.6.9. Soit E un FK espace et c une courbe dans E. S'équivalent:
(1) c est faiblement dérivable et sa dérivée est localement lipschitzienne.
(2) c est fortement dérivable et sa dérivée est localement lipschitzienne.

---

voisinage en 0 les $W_{B,O} = \{T|T(B)\subseteq O\}$ où B est borné dans X et O est un voisinage de 0 dans E. La bornologie de Von Neuman associée à la topologie de l'uniforme convergence sur les bornés est donc la suivant: un ensemble de fonctions est borné dans $CBS(X,E)$ ssi il envoie tout borné de X vers un borné de E.

Proof. Preuve du lemme 11
(2) ⇒ (1) est simple.
(1) ⇒ (2). Soit c une courbe dans E faiblement dérivable de dérivée localement lipschitziene. Fixons-nous A un borné de $\mathbb{R}$, et K un borné dont l'intérieur contient A. Pour tout $l \in E'$, $l \circ c$ est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée $(l \circ c)' = l \circ c'$ [6] est localement lipschitzienne. Donc d'après le lemme 10, $l(\delta^2(c)(K^{<2>})) = \delta^2(l \circ c)(K^{<2>})$ est borné, donc $\delta^2(c)(K^{<2>})$ est borné pour la bornologie faible sur E. Or pour $t, s, s' \in K$,

$$\delta(c)(t,s) - \delta(c)(t,s') = (s - s')\delta^2(c)(t,s,s')$$

Donc le réseau $(\delta(c)(t,s))_{s \in K}$ est de Mackey-Cauchy vis-à-vis du borné B. Il converge donc vers $c'(t)$, et ce uniformément sur K. c est donc fortement dérivable, et sa dérivée reste localement lipschitzienne. □

Proof. Preuve de la proposition 7.
La proposition 7 se déduit du lemme précédent, en tenant compte du fait qu'une fonction continument dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est localement lipschitzienne. □

La même topologie sur les espaces de courbes

Proposition A.6.10. Voir 4.2.7 dans FK. Soit E un FK-espace, $k \in \mathbb{N}$ et $B \subseteq \mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, E)$, et a_i, $i \leq k$ des réels deux à deux distincts. La structure de $\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, E)$ est induite de la même manière par les deux ensembles de fonctions suivants:

- $\delta^i : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to CBS(\mathbb{R}^{<i>}, E)\ \forall i \in \mathbb{N}$
- $ev_{a_i} \circ \mathcal{D}^i : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to \mathbb{R}$ pour $0 \leq i \leq k$ et $\mathcal{D}^i : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to CBS(\mathbb{R}, E)$ pour $i \geq k$

où $\mathcal{D} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ associe à une courbe sa courbe dérivée.

Proof. Cette proposition se déduit d'une proposition semblable dans le cas Lip^k, et du fait que la dérivée k-ième d'une courbe en $t \in \mathbb{R}$ est la limite que les t_i tendent vers t de $\delta^k(t_1, ..., t_{k+1})$. Lors de la preuve de la proposition dans le cas Lip^k (4.2.1 dans FK), on utilise en particulier une version du théorème des valeurs intermédiaire qui dit que pour I intervalle de $\mathbb{R}$, pour $f : I \to \mathbb{R}$, si f est k fois dérivable alors pour tout $i \leq k$, pour tout $x \in I^{<k>}$, il existe $\zeta \in I^{<k-j>}$ tel que $\delta^k(f)(x) = \delta^{k-j}(f^{(j)})(\zeta)$ (voir 3.15 dans FK). □

Proposition A.6.11. Soit $E \in Conv$. Alors l'identité forme une bijection continue de $\gamma \circ \beta(\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E))$ dans $\sigma_l(\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, \delta_l(E)))$.

[6] besoin de passer par l'intégrale ?

Proof. Montrons que les espaces vectoriels sous-jacents sont les mêmes. Soit c une courbe faiblement lisse sur $E \in FK$. C'est donc également une courbe de $\mathbb{R}$ dans E. Pour tout t, le réseau des $\frac{c(s)-c(t)}{s-t}$ converge faiblement vers $c'(t)$ lorsque $s \to t$, et c' est localement lipschitzienne (car continûment faiblement dérivable) de $\mathbb{R}$ dans E. D'après le lemme 12, en repassant dans la bornologie faible de E, $\delta^2(c)$ est bornologique. Comme dans la démonstration de lemme 11, on en déduit que lorsque K est un borné de $\mathbb{R}$ le réseau des $(\frac{c(s)-c(t)}{s-t})_{s\in K}$ est de Mackey-Cauchy dans E (d'après la proposition 2, $\beta = \sigma_b \circ \delta_l$), donc converge dans $\mu(E)$ ($\beta(E)$ est Mackey-complet, voir le diagramme de la section 1). En procédant de même pour toutes les dérivées n-ième de c, on montre que c est une courbe lisse de $\mathbb{R}$ dans E. Réciproquement, si c est une courbe lisse dans , elle est en particulier une courbe faiblement lisse dans $\delta(E)$.

Montrons que la topologie sur $\gamma \circ \beta(\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E))$ est plus fine que celle de $\sigma_l(\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, \delta_l(E)))$.
Comme on le voit dans 2.15 de KM, la topologie définie dans ce livre sur $CBS(X, E)$ est la topologie de la convergence uniforme sur tout les bornés de X. C'est également celle que l'on trouve sur $CBS(X, E)$ dans FK (voir la discussion au début de 2.3).
On remarque ensuite que la famille des $\mathcal{D}^i$, $i \in \mathbb{N}$ induit la même topologie que les $ev_{a_i} \circ \mathcal{D}^i : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to \mathbb{R}$ pour $i = 0$ et $\mathcal{D}^i : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E) \to CBS(\mathbb{R}, E)$ pour $i \geq 0$: si une suite de courbe converge en un point et que la suite des dérivées de ces courbe converge uniformément, alors la suite des courbes converge uniformément, et si une suite de courbe converge uniformément, elle converge en particulier en n'importe quel point de $\mathbb{R}$.
Par définition d'une topologie initiale dans FK, la topologie de $\sigma_l(\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, \delta(E)))$ est donc la bornologisation de la topologie initiale engendrée par les $\mathcal{D}^i$: $\mathcal{C}^\infty_{FK}(\mathbb{R}, \delta(E)) \to CBS(\mathbb{R}, \delta_l(E))$. Or dans FK, la topologie sur $CBS(\mathbb{R}, \delta_l(E))$ est la topologie bornologique associée à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$ pour la topologie faible sur E. Elle est donc plus grossière que la topologie sur $CBS(\mathbb{R}, E)$ dans KM. La topologie sur $\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E)$ étant la topologie initiale engendrée par les $\mathcal{D}^i : (\mathcal{C}^\infty_{KM}(\mathbb{R}, E)) \to CBS(\mathbb{R}, E)$, on a le résultat souhaité.

$\square$

B Complete vector spaces as a quantitative model of ILL

This is an intermediate work between convenient spaces and reflexive spaces. We show in this section how complete vector spaces are a quantitative model of ILL, as well as a differential category. The main goal of this internship was to adapt convenient spaces so as to have a quantitative model of Linear Logic: we wanted to have maps verifying a Taylor formula. The first step towards this result was the proof that Mackey-complete spaces and real-analytic maps formed a differential model of ILL, in my M1 internship with R. Blute, University of Ottawa. However, these real-analytic functions are weird, and the Taylor formula they give as a result is not at all satisfactory. The inspiration for the use of power series come from an article of topology [BS71], where the authors briefly define power series between topological vector spaces.

Another variation from the work of Blute, Ehrhard and Tasson is that we use complete and not Mackey-complete vector spaces. This is motivated by two reasons: on the one hand, Mackey-complete spaces are very common, and thus quite intangible. I did not found in the literature any example of a non Mackey-complete space. Complete spaces are better-known objects, thus it is legitimate to know if we can work with them. On the other hand, for the sake of quantitative semantics, we need to work with holomorphic functions, and we need to integrate them. This integration is not possible in Mackey-complete spaces.

Lastly, we abandon the hypotheses of bornological topology made in [BET10]. Indeed, this requirement implies to bornologize sometimes our objects, and it gives them a topology which is in general impossible to describe. This difference is also found between the two books on convenient vector spaces: in [FK88] Frölicher and Kriegl work with bornological Mackey-complete spaces, while in [KM97] Kriegl and Michor only use Mackey-complete spaces. I studied the correspondence between the two kind of spaces at the beginning of my internship, the results are detailed in the last annex.

We thus will describe a linear non-linear adjunction between two categories: the category of complete spaces bornological linear maps between them and the category of complete spaces and power series. To understand why linear non linear adjunction modelize Linear Logic, see [Mel08]. First I will recall a few results on completeness in topological vector spaces, and then describe successively the monoidal closed category of complete vector spaces and bornological linear maps, and the cartesian closed category of complete vector spaces and power series between them. Lastly, I will present the comonad making one category the co-Kleisli category of the other. We make use in all these parts of the definitions made in section 3, concerning the work done by Frölicher, Kriegl and Michor.

B.1 Complete vector spaces

During all our work on complete spaces, we will work with vector spaces over $\mathbb{C}$. It could be replaced by $\mathbb{R}$ for the part on monoidality and linear maps, but it is then essential when we will come across power series.

Definition B.1.1. Consider E a lctvs, and a net $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in E. Then this is a Cauchy net when for every 0-neighborhood U of 0, there is $\gamma_0 \in \Gamma$ such that if $\gamma, \gamma' \geq \gamma_0$, $x_\gamma - x_{\gamma'} \in U$

Definition B.1.2. E is said to be complete when every Cauchy net in E converges.

Proposition B.1.3. A Mackey-Cauchy net is a Cauchy-net.

Proof. Let use the notation above. Since any bounded set B is absorbed by every 0-neighborhood U, for γ and γ' big enough $\lambda_{\gamma,\gamma'} B \subseteq U$. □

Corollary B.1.4. A complete space is in particular Mackey-complete.

B.2 A monoidal closed category

Let us first explain the linear maps we will be working with.

Definition B.2.1. Consider $l : E \to F$ a linear map between two lcvts. l is said to be bornological when it sends every bounded of E towards a bounded of F.

Clearly, the composition of two linear bornological map is a linear bornological map. Let us denote *Lin* the category of complete spaces and linear bornological map.

Proposition B.2.2. A continuous linear map is bornological.

Proof. Consider $l : E \to F$ a continuous linear map between two lctvs, and b a bounded set of E. Let us show that $l(b)$ is bounded in F: consider U a 0-neighborhood in E. Then because $l(0) = 0$ and l is continuous we know that $l^{-1}(0)$ contains a 0 neighborhood in E. Thus, there is λ such that $b \subseteq l^{-1}(0)$, and consequently $l(b) \subseteq l(\lambda U) = \lambda l(U)$. $l(b)$ is then bounded and l is bornological. □

Proposition B.2.3. The converse is false in general: a bornological linear map may not be continuous. However, it is true when the topology of the codomain is bornological, i.e. when all bornivorous subsets of the codomain are 0-neighborhood.

Proof. The first assertion is immediate. Suppose now that the topology of E is bornological, and consider $l : E \to F$ a linear bornological function. Consider V a 0-neighborhood in F, and let us show that $l^{-1}(V)$ is bornivorous. This will achieve the proof for the continuity of l. Consider then b a bounded set in E. Since $l(b)$ is bounded, there is $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $l(b) \subseteq \lambda V$. Thus:

$$b \subseteq l^{-1}(l(b)) \subseteq l(\frac{V}{\lambda})\lambda l^{-1}(V)$$

. $\square$

Why do we work with bornological linear maps, and not continuous map for example ? For multiple reasons :

- Because of 2.6, bounded sets interest us as they relate strong and weak topologies. This gives us the chance to apply to our lctvs some the results we know on $\mathbb{C}$. Note that this is not the case for open sets: weak and strong topologies differs practically all spaces.
- Because we are finally interested in functions sending holomorphic curves to holomorphic curves. And Kriegl and Michor showed that between Mackey-complete spaces a linear function sends an holomorphic curve on an holomorphic curve iff it is bornological. See 7.4 [KM97] and B.3.3 below.

Now we can move to spaces of linear maps.

Definition B.2.4. We will note $\mathcal{L}(E,F)$ the space of all linear bornological functions between the lctvs E and F, and endow it with the topology of uniform convergence on bounded sets of E. We write $E^\times$ for $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$, the bornological dual of E.

The 0-neighborhood of this vector topology are generated by the :

$$\mathcal{U}_{B,U} = \{l | l(B) \subseteq U\}$$

where B is a bounded set in E and U a 0-neighborhood in F. This topology is a vector topology exactly because the considered maps are bornological.

Proposition B.2.5. When F is complete, then so is $\mathcal{L}(E,F)$.

Proof. Consider $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a Cauchy net in $\mathcal{L}(E,F)$. First, if we fix $x \in E$, $(f_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma}$ is clearly a Cauchy-net in F ($\{x\}$ is bounded in E). Thus, $f_\gamma \to f(x) \in F$ and we have defined this way a function $f : E \to F$.

f is clearly linear. Consider b a bounded set in E. For all 0-neighborhood U in F there is γ_0 such that for $\gamma, \gamma' \geq 0$, $(f_\gamma - f\gamma')(b) \subseteq U$. Thus

$$f(b) \subseteq \overline{U} + f\gamma_0(b).$$

But f_{γ_0} then there is λ such that $f\gamma_0(b)$ is included in λU. Referring to 2.1.1, we have then $f(b) \subseteq (\lambda+3)U$, and $f(b)$ is bounded. Thus $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

It is immediate now to see that $f_\gamma \to f$ in $\mathcal{L}(E,F)$. $\square$

Now we want to define a monoidal law on Lin. Of course, we will be using the tensor product. However, the tensor product of two complete spaces is not always complete. Thus we must complete this tensor product, in order to have an internal law on our category.

Definition B.2.6. Consider E and F two lctvs. We write $E \otimes F$ for the algebraic tensor product of the two vector spaces, and endow it with the topology whose 0-neighborhood are the set absorbing all the $B_1 \otimes B_2$, where B_1 and B_2 are bounded sets of E and F respectively. By definition, this topology is bornological. Now we write $E \hat{\otimes} F$ for the completion of $E \otimes F$.

Completing a lctvs can be done in several ways, but the Grothendieck completion might be the most meaningful one.

Proposition B.2.7. See [Gro73], Chapter 2, 14. For every lctvs E, there is a complete lctvs $\hat{E}$ and an embedding $\iota : E \to \hat{E}$ such that for every complete space F, for every continuous map $f : E \to F$, there is a unique continuous map $\overline{f} : \hat{E} \to F$ such that $\hat{f} \circ \iota = f$. Moreover, if f is linear, then so is $\hat{f}$. These facts all comes from the fact that E is dense in $\hat{E}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \hat{E} \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Remember also the universal property of the algebraic tensor product : there is $h : E \times F \to E \otimes F$ bilinear such that for every vector space G, for every bilinear map $f : E \times F \to G$ there is a unique linear map $f_{\otimes} : E \otimes F \to G$ such that $f = f_{\otimes} \circ G$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & E \otimes F \arrow[dl, dotted, "f_{\otimes}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

These two diagram will easily give us the closedness of $(Lin, \otimes, \mathbb{C})$.

Theorem B.2.8. For every complete spaces E, F and G

$$\mathcal{L}(E \hat{\otimes} F, G) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$$

Proof. Let us show first that the spaces are pointwise the same. To $g \in \mathcal{L}(E\hat{\otimes}F, G)$ we associate the bilinear map $x \mapsto y \mapsto g(x \otimes y)$ which is indeed bilinear. It is bornological because g is bornological, $B_1 \otimes B_2$ is still a bounded in $E\hat{\otimes}F$ since ι is bornological, thus $g(b_1 \otimes B_2)$ is bounded in G for B_1 and B_2 are bounded sets of E and F respectively.
To $f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ one associate $\hat{f_\otimes}$, which clearly linear and bornological. This is possible because $f_\otimes : E \otimes F \to G$ is linear bornological and since the topology of $E \otimes F$ is bornological, $f_\otimes$ is continuous. See proposition B.2.2.

Now why is this a bornological isomorphism ?

First notice that according to the definition of the topology of $E \otimes F$, we have a bornological isomorphisms between $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ and $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$. Bounded sets in these spaces are sets of functions sending a bounded of E and a bounded of$F$ on a bounded of G.

Let us show then that $\mathcal{L}(E\hat{\otimes}F, G)) \simeq \mathcal{L}(E \otimes F)$. Clearly the restriction of a bounded set in $\mathcal{L}(E\hat{\otimes}F, G))$ is a bounded set in $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$. Now take a bounded set B in the second space. Let us show that $\hat{B} \subseteq \mathcal{L}(E\hat{\otimes}F, G))$ is bounded. Consider $f \in B$ and $\hat{f} \in \hat{B}$. Because $E \otimes F$ is dense in $E\hat{\otimes}F$, for any bounded b in $E\hat{\otimes}F$ we have:

$$b = \overline{b \cap E \otimes F}.$$

And because the topology of $E \otimes F$ is bornological f and $\hat{f}$ are continuous. Then

$$\hat{f}(b) = \hat{f}(\overline{b \cap E \otimes F}) \subseteq \overline{\hat{f}(b \cap E \otimes F)} = \overline{f(b \cap E \otimes F)} \subseteq \overline{B(b \cap E \otimes F)}.$$

B being bounded in $\mathcal{L}(E \otimes F)$, $B(b \cap E \otimes F)$ is bounded in G, and so is its closure. $\hat{B}$ is then bounded.

□

B.3 A cartesian closed category

Now that we have our linear category, we want our category of non-linear maps. One of our goal was to have a quantitative model of Linear Logic. We wanted our non linear maps to have a Taylor formula, as good as possible. We went from real-analytic maps to holomorphic maps, and to holomorphic maps to entire maps, that is power series. Here, I expose only the case when the non-linear functions are power series. This part is inspired from [BS71], where the authors describe a theory of holomorphic functions from $\mathbb{C}$ to lctvs, and [Gro53], where Grothendieck use weak integrals to work on holomorphic curves. Kriegl and Michor, in [KM97], have described a theory of holomorphic functions between tvs, but they are limited by the fact that they cannot integrate those functions. Moreover, they work on Mackey-complete spaces, so their result apply to our reflexive spaces thanks to C.1.13, but it makes the proofs more complex. Kriegl and Michor's holomorphic

functions verify "locally" a Taylor formula, but for a too weird topology (see 7.19.6 in [KM97]).
In the preceding subsections concerning reflexive spaces, we could have work equally with vector spaces on $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Now, we need our spaces to be vector-spaces over $\mathbb{C}$.

B.3.1 Holomorphic functions in $\mathbb{C}$

Remember what is an holomorphic functions between $\mathbb{C}$ and $\mathbb{C}^n$: it is a complex differentiable function, that a functions such that for every $z \in \mathbb{C}$, the following limit exists :

$$\lim_{w \to 0, w \in \mathbb{C}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

An holomorphic function is going to be infinitely many times differentiable in $\mathbb{C}$, and is going to be analytic. That is, for all $z_0 \in \mathbb{C}$, for all z complex in a small ball around 0, we will have for all $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$f(z+z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$$

Moreover, such a function verifies the Cauchy formula and the Cauchy inequality: at 0 for example, we have

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

, and

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| \leq |\frac{sup\{f(\lambda||\lambda| = r\}}{r^n}|$$

for all sufficiently small r

We are going to define holomorphic functions from $\mathbb{C}$ to a lctvs E, which will be called holomorphic curves, and demonstrate that when E is reflexive, that we have locally a Taylor development and a Cauchy formula. The following paragraphs are inspired from [Gro53] and chapter 7 of [KM97].

B.3.2 Holomorphic curves in lctvs

Definition B.3.1. Consider E a lctvs. We say that a function $f : \mathbb{C} \to E$ is an holomorphic curve when it is everywhere complex differentiable.

Now we are going to show that we could have defined holomorphic curve through the dual $E^\times$: weak holomorphic curves and holomorphic curves are exactly the same thing.

Definition B.3.2. A function $f : \mathbb{C} \to E$ is said to be a weak holomorphic curve when if for every $l \in E^{\times}$, $l \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is holomorphic.

Before proving our statement, we need to recall a few facts on lipschitz curve. A curve $c : \mathbb{C} \to E$ is locally lipschitz when the set $\left\{\frac{c(z)-c(w)}{z-w}\right\}$ is locally bounded (for each point there is a neighborhood of this point of which the set is bounded). If c is weakly locally bounded, then it is also locally bounded. Indeed, if $l \circ c$ is locally lipschitz, it is lipschitz on every bounded set, since for an increasing finite sequence (t_i):

$$\frac{c(t_n - c(t_0)}{t_n - t_0} = \sum_{i<j} \frac{t_j - t_i}{t_n - t_0} \frac{c(t_j) - c(t_i)}{t_j - t_i}$$

. Hence

$$\left\{\frac{c(z) - c(w)}{z - w}\right\}$$

is weakly bounded on every bounded set of $\mathbb{C}$, thus bounded according to 2.6.

Proposition B.3.3. See [KM97], proposition 7.4. When E is Mackey-complete, a function $f : \mathbb{C} \to E$ is strong holomorphic iff it is weak holomorphic.

Proof. Necessity: Consider f a strong holomorphic curve, and $l \in E^{\times}$. We want to show that for all $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{l \circ f(z+h) - l \circ f(z)}{h} = l \circ f'(z).$$

l is not continuous in general, so we cannot conclude immediately. However, let us fix $z \in \mathbb{C}$. Because f is holomorphic in z, the difference quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, considered as a functions of h, extends to a functions of h defined everywhere on $\mathbb{C}$, and which is holomorphic too. The value in $h = 0$ of this curve is exactly $f'(z)$. Because it is holomorphic, this function is locally lipschitzian. There is a neighborhood U of 0 and $k > 0$ such that for every $h \in U$, and every $l \in E^{\times}$:

$$|\frac{l \circ f(z+h) - l \circ f(z)}{h} - l \circ f'(z)| \leq k.h.$$

Sufficiency. Consider c a weak holomorphic curve. Then for every $l \in E^{\times}$, the difference quotient $\frac{l(c(z+w)-c(z))}{w}$ can be extended on all $\mathbb{C}$ by a holomorphic function. It is then locally bounded, hence the difference quotient is a Mackey-Cauchy net in w. It does then converge, and our function is everywhere complex differentiable. □

Proposition B.3.4. An holomorphic curve is bornological.

Proof. This is a consequence of the fact that every holomorphic curve is a weak holomorphic curve. Indeed, consider f an holomorphic curve and b a bounded set in $\mathbb{C}$. Then for every $l \in E^{\times}$, $l \circ f$ is an holomorphic function from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$. It is then continuous, and because everything is perfect in $\mathbb{C}$, it makes it bornological. Hence $l(f(b))$ is bounded, and according to 2.6 $f(b)$ is bounded in E. □

Because an holomorphic curve is continuous and E is complete, it can be integrated over bounded subsets of $\mathbb{C}$. Thus the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda.$$

exists in E. Moreover, for every $l \in \mathbb{C}$ $l \circ c$ is an holomorphic curve from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$, hence verifies the Cauchy Formula. Because of 2.2.2, we thus have one E:

Theorem B.3.5. For every holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to E$, we have :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

B.3.3 Power series and holomorphic functions between lctvs

Holomorphic functions are not interesting us for themselves. As said before, we want a unique Taylor decomposition everywhere of our non-linear function. We are going to define power series independently of our results on holomorphic functions, and then use the fact that these power series will be holomorphic.
In $\mathbb{C}$, a power series is an everywhere converging sum $\sum_n a_n z^n$. We know that it implies that this sum is going to converge uniformly on every bounded all, and is going to be holomorphic.
Let us try to do something equivalent between lctvs. The problem is that there is no way to raise an element to the power n in a tvs. We are going to look to $a_n z^n$ as a n-homogeneous function instead. The use of the Cauchy formula in the proofs here is inspired from [BS71], where the authors work on Gateau-holomorphic functions between lctvs.

Definition B.3.6. Let us denote $\mathcal{H}^n(E,F)$ the space of monomials of degree n from E to F, i.e. the set of maps f such that there exists a bornological and symmetric n-linear mapping $\tilde{f}$ verifying $f(x) = \tilde{f}(x,...,x)$.

When f_k is a k-monomial, we will also denote by f_k the k-linear function from which f_k come. Hence $f_k(x) = f_k(x^k)$, and $f_k(x_1,...,x_k)$ is the image of the k-tuple $(x_1,...,x_k)$ by f_k.

Remark B.3.7. The bornological n-monomials are exactly the smooth n-homogeneous function in the sense of Frölicher, see [KM97] 5.16.1, which are

Definition B.3.8. We say that a function $f : E \to F$ is a power series when f is pointwise equal to a converging sum over $n \in \mathbb{N}*$ of n-monomials, and when this sum converge uniformly on bounded subset of E.

$$\text{For all } x \in E,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \text{ with } f_n \in \mathcal{H}^n(E,F)$$

The uniform convergence criteria means that for all B bounded in E, for all neighborhood of 0 U in F, there is $N \in \mathbb{N}$ such that $\forall x \in B \sum_{n\geq N} f_n(x) \in U$.

Remark B.3.9.

- Inspired by what happens for formal power series, we ask our power series to have *no constant term*, see B.3.30. This is in order to ensure that composition between power series still result in a power series. In terms of programs, it says that we do not modelize the constant program. Composition of power series with constant term is an intricate problem in mathematics.
- All of our power series admits 0 as a fix-point. However, I have no idea under what condition they can admit more fixpoints. This is work to be done.

Definition B.3.10. We write $S(E,F)$ the space of power series between E and F, and we endowed it with the topology of uniform convergence on bounded subsets of E.

One can just think of a power series as $f = \sum_n f_n$, and the converging hypotheses are just here to guarantee that everything works fine regarding holomorphy, cartesian closedness, or completeness.

Proposition B.3.11. All functions in $S(E,F)$ are bornological.

Proof. Consider $f = \sum f_k \in S(E,F)$, and B a bounded set in E. Let us fix $l \in F^\times$ and show that $l(f(B))$ is bounded. Thanks to 2.6, we will have that $f(B)$ is bounded. We know that $\sum f_k$ converges uniformly, hence weakly uniformly, on B. Then there is N such that $|(l \circ f - \sum_{k=0}^{N} l \circ f_k)(B)| < 1$. Moreover, each of the f_k sends B on a bounded sets, thus $(\sum_{k=0}^{N} f_k)(B)$ is a finite sum of bounded subsets, hence a bounded subset. Then we have

$$|l(f(B))| \leq 1 + |(\sum_{k=0}^{N} f_k)(B)| \leq M$$

for some M. We have our result. □

Now we want to show that a power series sends a weak holomorphic curve onto a weak holomorphic curve B.3.17. This result is quite intuitive, as it follows what happens in $\mathbb{C}$, but it asks for a few technical lemmas, mostly coming from [KM97]. The difficulties come from the fact that we have to get back to metrizable complete spaces to reason as we would have done in $\mathbb{C}$. This result is necessary thought because it leads to the Cauchy formula B.3.22 which is used a lot when working on the exponential. The reader who do not want to worry about these lemmas can jump directly to theorem B.3.17.

Definition B.3.12. A function $f : E \to F$ between two lctvs is holomorphic when it sends an holomorphic curve onto an holomorphic curve.

Lemma B.3.13. See [KM97] 7.6. A function in a Mackey-complete space E is an holomorphic curve iff it factors locally in an holomorphic curve into E_B, for some absolutely convex bounded set B.

Proof. Consider f an holomorphic curve, $z \in \mathbb{C}$ and W a compact neighborhood of z. Let us denote B the absolutely convex closed closure of $f(W)$. From the Cauchy formula and 2.2.2 we have that for r small enough:

$$\frac{r^k}{k!} c^{(k)}(z) \in B.$$

Thus for w close enough to z in $\mathbb{C}$,

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{w - z}{r} \right)^k \frac{r^k}{k!} c^{(k)}(z) \in \sum_{k \geq 0} \left(\frac{w - z}{r} \right)^k B.$$

This is equal to $c(w)$, and gives us that $c(w) \in E_B$ for w close enough to z. The converse proposition is immediate. ☐

Lemma B.3.14. See [KM97] 7.19 . If E and F are complete spaces, then a function $f : E \to F$ is holomorphic iff for all $l \in F^\times$ and B bounded absolutely convex in E, $l \circ f : E_B \to \mathbb{C}$ is holomorphic.

Proof. The results follows from the preceding lemma, and from the fact that a weak holomorphic curve is also strongly holomorphic (see B.3.3). ☐

Proposition B.3.15. See lemma 7.14 in [KM97]. Consider E is a complete metrizable space (hence a space verifying Baire property), and for each $k \in \mathbb{N}$ f_k a bornological k-linear symmetric scalar valued function on E. Then the following facts are equivalent:

1. The power series $\sum f_k(x^k)$ converges pointwise on an absorbing subset of E,

2. The set $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on a 0-neighborhood
3. The set $\{f_k(x_1,...,x_k)\}$ is bounded on some neighborhood of 0
4. The power series $\sum f_k(x^k)$ converges absolutely on an absorbing subset of E

This is just saying that, as soon as the codomain is complete and metrizable and the domain is $\mathbb{C}$, a pointwise converging power series is bounded, and converges uniformly somewhere. This seems quite intuitive, but we cannot get rid of the metrizable hypothesis on E.

Proof. (1) ⇒ (2) Since the domain of the f_k is $\mathbb{C}$, their bornologicality implies their continuity. Hence, the sets

$$A_{K,r} = \{x \in E| \ |f_k(x^k)| \leq Kr^k \text{ for all k}\}$$

are closed. Moreover, they do recover E by hypothesis. Then, by Baire property, there is an $A_{K,r}$ whose interior is nonempty. Consider $x_0 \in A_{K,r}$ and V a neighborhood of 0 such that $x_0 - U \subseteq A_{K,r}$. By algebraic manipulations, see lemma 7.13 of [KM97], we get for all $x \in V$ $|f(x^k)| \leq K\lambda^k$ for some $\lambda > 0$. Then $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on $\frac{V}{\lambda}$.
(2) ⇒ (3) Suppose $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on a 0-neighborhood U. We have

$$\begin{aligned}
f(x_1,..x_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\epsilon_1,...\epsilon_k=0}^{1}(-1)^{k-\sum\epsilon_j} f((\sum\epsilon_j x_j)^k) \\
&\leq \frac{1}{k!}\sum_{\epsilon_1,...\epsilon_k=0}^{1}(\sum\epsilon_j)^k\left|f\left(\left(\frac{\sum\epsilon_j x_j}{\sum\epsilon_j}\right)^k\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{k!}\sum_{\epsilon_1,...\epsilon_k=0}^{1}(\sum\epsilon_j)^k C \\
&\leq \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} j^k C \\
&\leq C(2e)^k
\end{aligned}$$

Hence $\{f_k(x_1,...,x_k)\}$ is bounded on $\frac{U}{2e}$.
(3) ⇒ (4) If $\{f_k(x_1,...,x_k)\}$ is bounded on U, the power series converges absolutely on rU, for $0 < r < 1$.
(4) ⇒ (1) is obvious. □

Lemma B.3.16. See lemma 7.17 in [KM97]. Consider E a metrizable complete vector space, $\sum f_k$ a power series from E to $\mathbb{C}$ converging pointwise on a neighborhood of 0, and $a(z) = \sum a_n z^n$ a power series from $\mathbb{C}$ to E, $a_n \in \mathbb{E}$ converging on a 0-neighborhood in $\mathbb{C}$. Then the composite of the two power series $\sum f_k(a(z))$ is a pointwise converging power series around 0.

Proof. This proof is exactly the one you can find in [KM97].By the preceding lemma there is U a 0-neighborhood in E such that $\{f_k(x_1,\dots,x_k) | k \in \mathbb{N}, x_j \in U\}$ is bounded. Since the series $\sum a_n z^n$ converges, there is r such that for all n $a_n z^n \in U$. Then, for $|z| < \frac{r}{2}$:

$$
\begin{aligned}
f(a(z)) &= \sum_k \sum_{n_1} \dots \sum_{n_k} f(a_{n_1}, \dots a_{n_k}) z^{n_1 + \dots n_k} \\
&= \sum_n \sum_k \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} f(a_{n_1}, \dots a_{n_k}) z^{n_1 + \dots n_k}
\end{aligned}
$$

This permutations are allowed because the $f(a_{n_1}, \dots a_{n_k})$ are bounded, and the series upon is absolutely converging in $\mathbb{C}$.

□

Theorem B.3.17. A power series between two complete spaces E and F sends an holomorphic curve on an holomorphic curve.

Proof. Consider $f \in S(E,F)$. According to B.3.14, we can suppose that E is a Banach space and F is $\mathbb{C}$. But then, composing f with an holomorphic curve into E, we are just composing f with a curve which is locally a power series. Our result stems from the preceding lemma. □

B.3.4 The product of complete spaces

Definition B.3.18. The cartesian product $E \times F$ of two locally convex topological vector space E and F is the vector space $E \times F$ endowed with the product topology, i.e. the topology generated by the $U_1 \times U_2$ where U_1 is a 0-neighborhood in E and U_2 is a 0-neighborhood in F.

Definition B.3.19. The direct sum $E \oplus F$ of two locally convex topological vector space E and F is the vector space $E \times F$ endowed with the topology generated by the $U_1 \times 0$ and the $0 \times U_2$ where U_1 is a 0-neighborhood in E and U_2 is a 0-neighborhood in F.

Proposition B.3.20. When both E and F are complete lctvs, $E \times F$ and $E \oplus F$ are complete.

Proof. Immediate. □

B.3.5 Convergence of power series

Our final goal is to prove that the category of complete spaces and power series between them is a cartesian closed category. This will give us the Seely isomorphism in our model of Intuitionist Linear Logic. First, we need to extract a few more properties from our non-linear maps. From now on, we suppose lctvs to be mentioned to be reflexive, and every integral to be written to be a weak integral.

Proposition B.3.21. If $f = \sum f_k$ is a power series between E and F, then for every $x \in E$, for every $k \in \mathbb{N}$, the n-th derivative in 0 of the curve $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ is $n! f_n(x)$.

Proof. Because E carries a vector topology, the set $\{\lambda x \| \lambda| < 1\}$ is bounded. Then $\sum f_k(\lambda x)$ converges uniformly for $|\lambda| < 1$, and we have $(\lambda \mapsto f(\lambda x))^{(n)}(0) = n! f_n(x)$. □

Proposition B.3.22. Every power series $f \in S(E, F)$ verifies a Cauchy formula.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

Proof. For every $x \in E$, $\lambda \mapsto \lambda x$ is an holomorphic curve into E, then $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ is an holomorphic curve into F by B.3.17. This curve verifies a Cauchy formula, as every holomorphic curve in a reflexive space by B.3.5. The previous proposition gives us the final result. □

Remark B.3.23. In fact, every power series which is converges weakly (wrt $F^\times$) uniformly on bounded sets of E verifies the Cauchy formula. Proposition B.3.21 can be adapted to these functions, as $F^\times$ is point separating. These power series admit weak derivatives, and they verify likewise the Cauchy formula above.

Corollary B.3.24. If U is an absolutely convex 0-neighborhood, and $r > 0$ is such that $f(rU) \subseteq B$ with B an absolutely convex closed bounded set, then for all k we have $f_k(U) \subseteq \frac{B}{r^k}$.

Corollary B.3.25. If $f \in S(E, F)$, then the development of f as a sum over k of k-monomials is unique.

Now we are going to explain two consequence of the Cauchy formula for power series. They are very simple and practical, as they link weak convergence and strong convergence for power series.

Proposition B.3.26. Consider $f_k, k \in \mathbb{N}$ k-monomials from E to F. If $\sum l \circ f_k$ converges pointwise on E for every $l \in F^\times$, then $\sum f_k$ converges pointwise on E

Proof. Let us fix $x \in E$, and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| > 1$. $\sum l \circ f_k(\lambda x)$ converges for every $l \in F^\times$, hence the set $l(\{f_k(\lambda x)\})$ is bounded in $\mathbb{C}$. By 2.6, we know it means that $\{f_k(\lambda x)\}$ is bounded in F. Let us write B for the closure of this sets, which is still bounded by 2.7.

Now consider U a 0-neighborhood in E and μ such that $B \subseteq \mu U$. Let N be a natural number such that $|\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}| < \mu$. Then we have $\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x) \subseteq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} B \subseteq U$, thus $\sum f_k(x)$ converges. □

Proposition B.3.27. Consider $f_k, k \in \mathbb{N}$ k-monomials from E to F. If $\sum l \circ f_k$ converges towards $l(f)$ uniformly on bounded subsets of E for every $l \in F^\times$, and if f is bornological, then $\sum f_k$ converges uniformly on bounded subsets of E.

Proof. Let us fix B_0 a bounded set in E, and U a 0-neighborhood in F. We want to find $N \in \mathbb{N}$ such that $(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(B_0) \subseteq U$. From B.3.23, we know that $f = \sum f_k$ still verifies a Cauchy formula. Thus, we have $f_k(B_0) \subseteq \frac{f(2B_0)}{2^k}$ for every k, hence $(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(B_0) \subseteq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) f(2B_0)$. Since for some μ, $f(2B_0) \subseteq \mu U$ and $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0$, we have our result. □

During this proof, we proved:

Proposition B.3.28. If $f = \sum f_k$ is a power series in $S(E,F)$, then the partial sums $\sum_{k=1}^{N} f_k$ Mackey-converge towards f in $S(E,F)$: there is B a bounded set in $S(E,F)$ and a sequence of positive reals (λ_n) decreasing towards 0 such that:

$$\forall N, (\sum_{k=1}^{N} f_k - f) \in \lambda_N B.$$

We still need another tool to work on our power series. The last proposition help us to go from weak convergence to strong convergence, the following will allow us to go from pointwise convergence to uniform convergence, under certain conditions.

Proposition B.3.29. Consider $\sum_k f_k : E \to F$ a pointwise converging series of bornological k-monomials. If the sum converges towards a bornological function, then the sum does converge uniformly on the bounded sets of E.

Proof. Let us fix $l \in F^\times$. For every $x \in E$, $\sum l \circ f_k(x)$ converges towards $l \circ f(x)$ where $f : E \to F$ is bornological. Consider B a bounded set. Then, according to B.3.15, the power series $\sum l \circ f_k(x)$ converges uniformly on E_B (as it is a Banach space, see B.1.4), hence on B. We have proved that $\sum_k f_k$ converges weakly uniformly on bounded sets. ByB.3.27, we know that it converges (strongly) uniformly on bounded subsets. □

B.3.6 Quant is cartesian closed

Now before proving that reflexive spaces and power series between them are a cartesian closed category, we should check that it is indeed a category.

Proposition B.3.30. The composition of two power series is a power series.

This proof is both an adaptation of what happens in formal power series (see [Hen88] chapter 1), and an adaptation of the fact that you can compose two absolutely convex power series in $\mathbb{C}$, where they converge absolutely. We explain what happens in the case of monomials in lctvs, and go back to the scalar case thanks to C.3.31.

Proof. Consider $f = \sum f_k \in S(E,F)$ and $g = \sum g_n \in (F,G)$ two power series between reflexive spaces. Let us fix $x \in E$. By definition of g, we have $g \circ f(x) = \sum_n g_n(f(x))$. Let us now fix n. But g_n is a n-monomial from E to F, coming from a n-linear symmetric application. Applied to any finite sum it gives:

$$g_n(y_1 + y_2 + \cdots + y_m) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_m=n} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots, j_m} g_n(y_1^{j_1}, y_2^{j_2}, \ldots y_m^{j_m})$$

where $\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_m} = \frac{n!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}$. Now the function

$$x \mapsto g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots f_m(x)^{j_m})$$

is a $(n \times (\sum_{k=1}^{m} k \times j_k))$ monomials. This is easy to see when in $\mathbb{C}$ when $g_n : y \mapsto y^n$ and $f_k : x \mapsto x^k$: then $g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots f_m(x)^{j_m}) = (x^{j_1}x^{j_2}\ldots x^{j_m})^n$. In our topological space, we use the remark B.3.7, saying that bornological n-monomials and smooth n-homogeneous functions are the same thing. Here

$$x \mapsto g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots f_m(x)^{j_m})$$

is clearly a $(n \times (\sum_{k=1}^{m} k \times j_k))$-homogeneous monomial, and it takes a smooth curve to a smooth curve when so does g_n and the f_k. Let us write $h_{n,m}$ for this monomial.

Can we write $g_n(f(x)) = \lim_{m\to\infty} h_{n,m}(x)$? Yes, we can show as in B.3.28, and because g_n is bornological: if

$$(\sum_{k=1}^{m} f_k - f) \in \lambda_m B$$

then

$$g_n(\sum_{k=1}^{m} f_k(x)) - g_n(f(x)) \in (\lambda_m)^n g(B(x)).$$

Since $g(B(x))$ is bounded in F, for every neighborhood of 0 in F, there is some rank m for which $g_n(\sum_{k=1}^{m} f_k(x)) - g_n(f(x))$ will be included in this neighborhood.

So $g(f(x)) = \sum_n \sum_{j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots} g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots)$. If we can permute these sums, we would have

$$g(f(x)) = \sum_N \sum_{n \leq N} \sum_{\substack{j_1+j_2+\ldots=n, \\ (n \times (\sum_{k=1}^{\infty} k \times j_k)) = N}} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots} g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots)$$

and this would be a pointwise converging power series. Beware that this is a power series because f has no constant coefficient ! Otherwise the term under $N = 0$ would be infinite.

Now why can me make this sum commutes ? Let us fix $x \in E$, and $l \in G$. We proceed like in the proof of B.3.33. We want to permute

$$l(g(f(x))) = \sum_n \sum_{j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots} l(g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots))$$

.

But

$$\sum_n \sum_{j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_1, j_2, \ldots} |l(g_n(f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots))|$$

does converge absolutely. Then according to Fubini theorem, we can permute this sum. It converges weakly, hence strongly by B.3.26.

Now $g \circ f$ is a pointwise converging series, and a bornological function because both f and g are. According by B.3.29, $g \circ f$ converges uniformly on bounded subsets of E, we have then $g \circ f \in S(E, G)$

□

Let us denote *Quant* the category of complete spaces and power series between them. Remember that we endow $S(E, F)$ with the topology of uniform convergence on bounded subsets of E. The first thing you want to do for cartesian closedness is to prove that the space of non-linear function is still an object of our category.

Proposition B.3.31. $S(E, F)$ is a locally convex topological vector set as soon as F is a reflexive lctvs.

Proof. A 0-neighborhood in $S(E, F)$ contains some

$$\mathcal{U}_{B,U} = \{f | f(B) \subseteq U\}$$

where B is a bounded set in E and U is a 0-neighborhood in F. Those sets are clearly convex when the 0-neighborhood in F are. The sum of two such sets $\mathcal{U}_{B_1,U_1}$

and $\mathcal{U}_{B_2,U_2}$ contains $\mathcal{U}_{B_1 \cap B_2, U_1+U_2}$, and $U_1 + U_2$ is a 0-neighborhood when F is a locally convex topological vector spaces, hence addition is continuous. Finally, multiplication by a scalar is continuous since every power series is bornological (see B.3.11). □

Theorem B.3.32. The space $S(E,F)$ is complete when E and F is.

Proof. Consider $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ a Cauchy-net in $S(E,F)$. For all $x \in E$, because for every 0-neighborhood U in F $\mathcal{U}_{\{x\},U}$ is a 0-neighborhood in $S(E,F)$, $(f_{\gamma(x)})_{\gamma\in\Gamma})$ is also a Cauchy-neighborhood. F is complete, so each of these Cauchy-nets converges towards $f(x) \in F$.

Let us show that $f : E \to F$ is a power series. First, consider $k \in \mathbb{N}^\star$. Because of the Cauchy formula B.3.22, if $f_\gamma - f_{\gamma'} \in \mathcal{U}_{B,U}$, then $(f_\gamma)_k - (f_{\gamma'})_k \in \mathcal{U}_{B,\overline{U}} \subseteq \mathcal{U}_{B,3U}$. Then $((f_\gamma)_\gamma)_{\gamma\in\Gamma})$ is also a Cauchy-net in $S(E,F)$, converging pointwise towards $f_k(x)$. It is easy to see that f_k is k-homogeneous as all the $(f_\gamma)_k$ are. But this is not enough: we want f_k to result from a bounded k-linear symmetric mapping. Let us note $f^\star_{\gamma,k}$ for the k-linear symmetric mapping from which $f_{\gamma,k}$ result. Then for every $x_1,\ldots,x_k \in E$ we have, according to proposition 7.13 in [KM97] :

$$f_k(x_1,..x_k)^\star = \frac{1}{k!}\sum_{\epsilon_1,\ldots\epsilon_k=0}^{1}(-1)^{k-\sum\epsilon_j} f_k(\sum \epsilon_j x_j)$$

.

Hence it is easy to see that $(f^\star_{\gamma,k})_\gamma$ is also a Cauchy net in $\mathcal{L}^k_{sym}(E,F)$. Since F is complete, it converges pointwise towards a function $f_k\star$ which is clearly k-linear and symmetric. Why is $f_k\star$ bornological ? Because for every bounded b in E and every neighborhood U in F, there is γ_0 such that:

$$f^\star_k - f^\star_{\gamma_0,k} \in \overline{\mathcal{U}_{b^k,U}} \subseteq \mathcal{U}_{b^n,3U}$$

thus $f^\star_k(b_n) \subseteq 3U + f^\star_{\gamma_0,k} \subseteq \lambda U$ for some λ since $f^\star_{\gamma_0,k}$. Then f_k is bornological and it is easy to see that $f^\star_k(x^k) = f_k(x)$.

Now we just have to show that $f = \sum f_k$. Because the f_γ are pointwise convergent towards f, it is easy to see that $\sum f_k$ is pointwise convergent towards f. Moreover, f is bornological because all the f_γ (it is shown as above for f_k). Then, according to proposition B.3.29, $\sum f_k$ does converge uniformly on bounded sets of E towards f. Thus $f \in S(E,F)$

Lastly, we have that clearly that once f is a power series, since (f_γ) is a Cauchy net, it converges uniformly on bounded sets towards f. Thus $S(E,F)$ is complete. □

Theorem B.3.33. For complete spaces E, F, and G : $S(E\times F,G) \simeq S(E,S(F,G))$.

Proof. We know thanks to B.3.20 and B.3.32 that the spaces considered are all reflexive. Let us first notice that if the spaces are equal, the topologies on these are the same: synthetically, sending $B_1 \times B_2$ on a weak 0-neighborhood U is the same that sending B_1 on a function which will send B_2 on U. This gives us a homeomorphism, hence a bornological isomorphism, between the two spaces.
We want to show that

$$\phi : \begin{cases} S(E \times F, G) \to S(E, S(F,G)) \\ \sum f_k \mapsto \left(x \mapsto \left(y \mapsto \sum_n \sum_m \binom{n+m}{n} f_{n+m}(\underbrace{(x,0),\dots,(x,0)}_{n \text{ times}}, \overbrace{(0,y),\dots,(0,y)}^{m \text{ times}}) \right) \right) \end{cases}$$

and

$$\psi : \begin{cases} S(E, S(F,G)) \to S(E \times F, G) \\ \sum_n (f_n : x \mapsto \sum_m f_{n,x,m}) \mapsto \left((x,y) \mapsto \sum_k \sum_{n+m=k} f_{n,x,m}(y) \right) \end{cases}$$

are well defined, that each one is inverse of one another, are that they are linear and bornological.
A few lines of calculus easily show that ϕ and ψ are inverse of one another. The difficulty is in showing that their image is indeed made of power series. We will do it on ψ, the proof for ϕ using the same tools and being easier.
Here, we are going to go back to what happens in the scalar case, and use the Fubini theorem on absolutely converging sums to permute our sums. Then, we will return to our power series converging uniformly thanks to C.3.34. Consider indeed a function $f \in S(E, S(F,G))$. Then f can be written as $\sum_n (f_n : x \mapsto \sum_m f_{n,x,m})$, each f_n being a bornological p-monomial from E to $S(F,G)$, and each $f_{n,x,m}$ being a bornological m-monomial from F to G. Let us fix $l \in G^\times$. We know that for all $y \in F$, $\theta = l \circ ev_y$ is a bornological form on $S(E,F)$.

Moreover, because f is in particular a pointwise converging power series, hence weakly converging, we know that $\sum_n \theta \left(\sum_m f_{n,x,m} \right) = \sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges for every $x \in E$. Let us fix x and y. Then for any $\lambda \in \mathbb{C}$ bigger in module than 1, we have that $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,\lambda x,m}(\lambda y)$ converges. Hence, because we are in $\mathbb{C}$, the double sequence $(l \circ f_{n,\lambda x,m}(\lambda y))_{n,m}$ is bounded, and $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges absolutely.

Now is the time for Fubini theorem to intervene. Thanks to Fubbini theorem, we know that in $\mathbb{C}$ we can permute absolutely converging double series. Then $\sum_k \sum_{n+m=k} l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges and equals $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$. The function

$(x,y) \mapsto \sum\limits_{n+m=k} f_{n,x,m}(y)$ is indeed a bornological k-monomial: you can prove it by algebraic manipulations on monomials or use B.3.7. Hence $\psi(f)$ a weakly pointwise converging power series. Thanks to C.3.31, we see that is converges pointwise strongly.

To see that $\psi(f)$ converges uniformly on bounded subsets of E, we just have to use the fact that it is bornological : f is bornological thanks to B.3.11, and $\psi(f)$ sends $B_1 \times B_2$ on $f(B_1)(B_2)$. Now we can use the fact a pointwise converging power series which converges towards a bornological function converges uniformly on bounded subsets its codomain (see B.3.29). We conclude that $\psi(f) \in S(E \times F, G)$. □

Theorem B.3.34. *Quant* is a cartesian closed category.

Proof. The theorem follows direclty from the preceding proposition. □

B.4 The exponential

We have our linear category and our non-linear one, we miss the adjunction between the two. This adjunction results in a monad $! : Lin \to Lin$, which modelize the exponential constructor of Linear Logic. As the adjunction will be between a right adjoint from *Quant* to *Lin*, and the oblivion functor $Lin \to Quant$ as left adjoint, we will right also $! : Quant \to Lin$ for our right adjoint. The exponential here is constructed exactly as in convenient spaces (see [BET10]).

We first need a lemma about a space and its bornological dual. Remember that we write $E^\times$ for $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, the bornological dual of E.

Proposition B.4.1. Consider E a lctvs, and $\delta : E \mapsto E^{\times\times}$. Then δ and δ^{-1} are both bornological linear maps.

Proof. Remember that $E^\times$ is endowed with the bornology of the equibounded : a set is bounded in $E^\times$ iff it sends a bounded set of E on a bounded set of $\mathbb{C}$. δ is obviously linear, since its image is a space of linear functions. Consider then a bounded set b in E, and a bounded set B in $E^\times$. Then $\delta(b)(B) = B(b)$ is bounded in $\mathbb{C}$, hence $\delta(b)$ is bounded in $E^{\times\times}$, and δ is bornological.
Now, let $\mathcal{B}$ be a bounded set of $E^{\times\times}$. We want to show that $\delta^{-1}(\mathcal{B})$ is bounded. Consider $l \in E^\times$. Then $l(\delta^{-1}(\mathcal{B})) \subseteq \mathcal{B}(l)$ is bounded in $\mathbb{C}$. $\delta^{-1}(\mathcal{B})$ is scalarly bounded, hence bounded by proposition 2.6. Then δ^{-1} is bornological. □

Now what do we want as an exponential ? We want for each complete lctvs E another complete lctvs $!E$ satisfying for all F $S(E,F) \simeq \mathcal{L}(!E, F)$. In particular, $(!E)^{\times\times} = \mathcal{L}(!E, \mathbb{C})^\times = S(E, \mathbb{C})^\times$. Moreover, we know (see B.4.1) that every lctvs G

is bornologically isomorphic to $\{ev_x \in (G)^{\times\times} | x \in G\}$. Thus, $!E$ must be bornologically isomorphic to $\{ev_x \in S(E, \mathbb{C})^{\times} | x \in E\}$. As we want $!E$ to be a complete lctvs, the following definition is immediate.

Definition B.4.2. Let us write δ for the function $x \mapsto \delta(x) = ev_x$, defined here between E and $S(E, \mathbb{C})^{\times}$. Then we write $!E$ for the completion of the linear span of $\delta(E)$ in$S(E, \mathbb{C})^{\times}$

Definition B.4.3. We write $! : Quant \to Lin$ for the functor sending a reflexive space E on $!E$, and a power series $f \in S(E, F)$ on the completion of the linear extension of the following function :

$$\begin{cases} \delta(E) \to !F \\ \quad ev_x \mapsto ev_{f(x)} \end{cases}$$

This function is continuous, as the inverse image of $\mathcal{U}_{B,\epsilon} \cap !F$ is $\mathcal{U}_{B \circ f, \epsilon} \cap \delta(E)$. Hence $!f$ is well defined, and is a continuous linear function. So we have indeed $!f \in \mathcal{L}(!E, !F)$.

Remember that $!E \subseteq S(E, \mathbb{C})^{\times}$ bears the topology of uniform convergence on bounded subsets of $S(E, \mathbb{C})$. It's a complete lctvs, hence an object of *Lin*. We want now to show the adjunction between *Quant* and *Lin* (see B.4.7). For this, we are going to need to work on δ, and show that it is a power series. In fact, δ pretty much takes the shape of the functions of its codomain (see [BET10] where δ is smooth).

Proposition B.4.4. Let us write θ_n for the function $x \in E \mapsto (f = \sum f_k \in S(E, \mathbb{C}) \mapsto f_n(x))$. Then for all $x \in E$, $\theta_n(x) \in !E$, and θ_n is a bornological n-monomial from E to $!E$.

Proof. θ_n is well defined thanks to the uniqueness of the development of a power series (see B.3.25). Besides, $\theta_n(x)$ is clearly linear and bornological, since bounded sets of $S(E, \mathbb{C})$ are equibounded.Thus $\theta_n(x) \in S(E, \mathbb{C})^{\times}$. Moreover, according to B.3.21 one can write:

$$\theta_1(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_{tx} - \delta_0}{t}$$

.

$$\theta_{n+1}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\theta_n(tx) - \theta_n(x)}{t}.$$

As $!E$ is complete it is in particular closed, and we can show recursively that $\theta_n(x) \in !E$ for all $x \in E$.

Now θ_n results from the n-linear symmetric bornological function $(x_1,..x_n) \mapsto (f \mapsto f_n(x_1,..x_n)))$. Again, this function is bornological by definition of the bornology on $!E$. Thus, θ_n is a bornological n-monomial. $\square$

Proposition B.4.5. *$\delta : E \to !E$ defined by $\delta(x) = ev_x : f \mapsto f(x)$ is in $S(E,!E)$. That is, $\delta = \sum_k \theta_k$ is a power series and converges uniformly on bounded sets of E.*

Proof. For every $f \in S(E,\mathbb{C})$, for every $x \in E$ we have $\delta_x(f) = f(x) = \sum f_k(x) = \sum \theta_k(x)(f)$. When we fix x, pointwise we have $\delta_x = \sum \theta_k(x)$. Do we have this equality in $!E$? That is to say, considering the topology of E, do we have uniform convergence on every bounded sets of $S(E,\mathbb{C})$ of $\sum \theta_k(x)$. Indeed, thanks to the Cauchy formula: consider B a bounded set of $S(E,\mathbb{C})$, and b an absolutely convex closed subset of E containing x. For every $f \in S(E,\mathbb{C})$, $f(x) \in B(2b)$, which is a bounded set in $\mathbb{C}$: $|f(x)| \leq M$ or every $f \in S(E,\mathbb{C})$. Then according to the Cauchy formula (see B.3.22), for every k and f we have $|f_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}$. We have $|\sum \theta_k(B)| \leq \left(\sum_k \frac{1}{2^k}\right) M$, and uniform convergence of this sum.
From this we can conclude that pointwise, we have $\delta = \sum \theta_k$. We know that the θ_k are bornological k-monomials, let us just check that we have uniform convergence on bounded subsets of E. Let us fix b a bounded subset of E, and $\mathcal{U}_{B,\epsilon}$ a 0-neighborhood in $!E$. We want to find N such that for all $x \in b$, $\sum_{k=N}^{\infty} \theta_k(x) \in \mathcal{U}_{B,\epsilon}$, i.e. N is such that for all $x \in b$, for all $f \in B$, $|\sum_{k=N}^{\infty} \theta_k(x)(f)| = |\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)| < \epsilon$. But is is again a result of the Cauchy formula. Consider b' a closed absolutely convex bounded set of E containing b. Then $B(2b')$ is bounded in $\mathbb{C}$: $B(2b') \subseteq [-M;M]$ for some $M > 0$. Consider N such that $\sum_{k \geq N} \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{M}$. Then we have for all $x \in b$, for all $f \in B$, for all k, $|f_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}$, and $|\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)| \leq |\sum_{k=N}^{\infty} \frac{M}{2^k}| < \epsilon$. $\square$

Lemma B.4.6. *The series $\sum \theta_k$ is also what is called a Mackey convergent sequence: there is $\mathcal{B}$ a bounded set in $\mathcal{L}(E,!E)$ and a sequence of scalars $(\lambda_n)_n$ converging towards 0 such that*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k - \delta\right) \in \lambda_n \mathcal{B}.$$

Proof. The proof is done exactly as above, using the Cauchy formula. Consider b and B two bounded closed absolutely convex sets in E and $S(E,\mathbb{C})$ respectively. Let us denote K for the absolutely convex closed closure of $B(2b)$. Then, by the Cauchy formula for power series, we have

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k(b)(B) - \delta(b)(B) \subseteq \left(\sum_{k>n} \frac{1}{\lambda^k}\right) K.$$

K being bounded, we have that for every b and B bounded in E and $S(E,\mathbb{C}$ respectively,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k(b)(B) - \delta(b)(B)}{\sum_{k>n}\frac{1}{\lambda^k}}$$

is bounded in $\mathbb{C}$. Hence

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k(b) - \delta(b)}{\sum_{k>n}\frac{1}{\lambda^k}}$$

is bounded in $!E$. Hence

$$\mathcal{B} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\theta_k - \delta}{\sum_{k>n}\frac{1}{\lambda^k}}$$

is a bounded set in $\mathcal{L}(E, !E)$, and we have our result. □

Theorem B.4.7. For every reflexive space E and F, we have

$$S(E,F) \simeq \mathcal{L}(!E,F).$$

This isomorphism comes from an adjunction between $! : Lin \to Lin$ and the oblivion functor $\mathbb{U} : Lin \to Quant$

Proof. Consider $f \in S(E,F)$. Then define $\hat{f} :!E \to F$ as $\hat{f}(ev_x) = f(x)$, extended linearly and completed. We can define this function on $!E$ as $\hat{f}_{|\delta(E)}$ is continuous : $\hat{f}^{-1}_{|\delta(E)}(U) = \mathcal{U}_{\{f\},U} \cap \delta(E)$. By definition of the completion of a lctvs, $!f$ is linear and continuous, hence linear and bornological.

Now consider $g \in \mathcal{L}(!E,F)$ and define $\check{g} : E \to F$ by $\check{g}(x) = g(ev_x) = g \circ \delta$. g is not continuous in general, so despite its linearity we cannot conclude that $g(ev_x) = \sum g(\theta_k)$. Now is the time for using the lemma just above. Because g is bornological, we have for every $n \in \mathbb{N}$:

$$g \circ (\sum_{k=1}^{n}\theta_k - \delta) = \sum_{k=1}^{n} g \circ \theta_k - g \circ \delta \in \lambda_n g \circ (\mathcal{B}).$$

Now we see that $\sum_{k=1}^{n} g \circ \theta_k$ Mackey converge towards $g \circ \delta$, and a few lines of immediate calculus show that the convergence is uniform on bounded sets of E. Then $\check{g} \in S(E,F)$, and we have our result.

It is straightforward that $\hat{\check{g}} = g$, $\check{\hat{f}} = f$, that $g \mapsto \check{g}$ and $f \mapsto \hat{f}$ are both linear and bornological, and this induce an isomorphism which natural in E and F. We have our adjunction.

□

The natural transformations associated to this adjunction are :

- The co-unit $d : !E \to E$ defined by the $d(\lambda ev_x) = \lambda x$ and then extended linearly and completed.
- The unit : $\iota : E \to !E$, defined by $\iota(x) = \delta_x$.

For the comonad, ! comes then with d and the comultiplication $\rho : !E \to !!E$ defined on basis elements by $\rho(\lambda\delta_x) = \lambda\delta_{\delta_x}$. This endows the category *Lin* with a symmetric monoidal comonad. The preceding theorem shows that *Quant* is exactly the co-Kleisli category $Lin_!$.

This comonad induces a structure of bialgebra on every $!E$:

- $\Delta : !E \to !E \otimes !E$ is defined by $\Delta(\lambda ev_x) = \lambda ev_x \otimes ev_x$, then extended linearly and completed.
- $e : !E \to \mathbb{C}$ is $e(\lambda ev_x) = \lambda$, and then extended linearly and completed.
- $\triangledown : !E \otimes !E \to !E$ is $\triangledown(ev_x \otimes ev_y) = ev_{x+y}$.
- $\nu : \mathbb{C} \to !E$ is $\nu(1) = ev_0$.

All these morphisms are bornological linear maps. So as to have a model of Linear Logic, we just miss the Seely isomorphism.

Proposition B.4.8. Clearly, we have $1 = \mathbb{C} \simeq !(\top) = !\{0\}$ as $S(\{0\}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Theorem B.4.9. For every complete spaces E and F we have $!E \hat{\otimes} !F \simeq !(E \times F)$.

Proof. The demonstration is inspired by [BET10]. By definition $!(E \times F)$ is complete. Let us show that is satisfies the universal property of the tensor product in the category of complete spaces and linear bornological maps. This will give us the theorem.

We clearly have our bornological map $\delta : E \times F \to !(E \times F)$. Consider now $f : !E \times !F \to G$ a bilinear bornological map, where G is a complete lctvs. However, thanks to the cartesian closedness of *Lin* and to the adjunction ! between *Quant* and *Lin*:

$$\begin{aligned} f \in & \mathcal{L}(!E, \mathcal{L}(!F, G)) \\ \simeq & S(E, S(F, G)) \\ \simeq & S(E \times F, G) \\ \simeq & \mathcal{L}(!(E \times F), G) \end{aligned} \tag{1}$$

The image of f in $\mathcal{L}(!(E \times F), G)$ is unique. We have our result. □

This concludes our construction of our denotational model of Linear Logic.

Theorem B.4.10. The category *Lin*, equipped with the comonad !, is quantitative model of intuitionist Linear Logic.

B.5 A differential structure

Let us show that is is a differential category, as defined in [BCS06].

B.5.1 Prerequisites

In [BCS06], differential categories were built to modelize more than differential λ-calculus or differential linear logic, so they are neither closed nor $\star$-autonomous. Note for instance that the fundamental category of finite-dimensional real vector spaces and smooth maps between them is not closed at all, even though we would like them to be modelized by some differential category. Precisely, the purpose of the study of convenient spaces by Frölicher and Kriegl in [FK88] was to find a cartesian closed category on which to do a substantial amount of analysis.

Definition B.5.1. A differential category is a symmetric monoidal category, with an additive law on the Hom-sets, a coalgebra modality, and a differential combinator.

A coalgebra modality is a comonad $(!, \rho, \epsilon)$ such that each object $!X$ is equipped with a good co-algebra structure,of which we won't give the details. See [BCS06] for a precise explanation, and recall that we need two arrows for each $!X$: $\Delta : !X \to !X \otimes !X$ and $e : !X \to \mathcal{I}$, as well as an arrow : $\phi : !A \otimes !B \to !(A \otimes B)$, $\phi : 1 \to !1$.

A way to have an additive structure on the Hom-sets is to require a biproduct law on the category, and then arrows : $\triangledown : !X \otimes !X \to !X$ and $\nu : \mathcal{I} \to !A$. We'll use biproducts for the differential category on convenient spaces (Con_ω).

Let's study the differential operator. It's supposed to be a combinator which naturally transforms $f : !A \to B$ into $Df : A \otimes !A \to B$. In fact, it is enough for us to have, for each object A, a deriving transformation $d_A : A \otimes !A \to !A$ which would correspond to $D[1_{!A}]$. Indeed, suppose we have a differential operator which is natural in A and in B for each object A, B . Then if the first diagram commutes, the second will :

$$\begin{tikzcd}
!A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!u"'] & B \arrow[d, "v"] \\
!C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes !A \arrow[r, "D[f["] \arrow[d, "u\otimes !u"'] & B \arrow[d, "v"] \\
C \otimes !C \arrow[r, "D[g["'] & D
\end{tikzcd}$$

Write d_A for $D[1_{!A}]$. Then one has two commuting diagrams :

$$\begin{tikzcd}
!A \arrow[r, "!1"] \arrow[d, "!1"'] & !A \arrow[d, "f"] \\
!A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes !A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "1\otimes !1"'] & !A \arrow[d, "f"] \\
A \otimes !A \arrow[r, "D[f["'] & B
\end{tikzcd}$$

and then can get d_A from D and D from d_A for all objects A. If biproducts exists, things are even simpler, as d_A can be written as $d_A = (coder_A \otimes 1); \triangledown$, where $coder_A : A \to !A$.

Of course, we'll want D to be additive, null on constant maps, to be the identity on linear maps and to verify the chain rule and Leibniz rule. According to Fiore, it is summarized in the two following diagrams on $coder_A$:

- Strength :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes !B \arrow[rr, "coder_A \otimes 1"] \arrow[drr, "1 \otimes d_A"] & & !A \otimes !B \arrow[rr, "\phi"] & & !(A \otimes B) \\
& & A \otimes B \arrow[urr, "coder_{A \otimes B}"] & &
\end{tikzcd}$$

- Comonad :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "coder_A"] \arrow[d, "1"'] & !A \arrow[dl, "\epsilon"] \\
A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "coder_A"] \arrow[d, "\simeq"] & !A \arrow[r, "\rho"] & !!A \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes 1 \arrow[r, "coder_A \otimes \nu"] & !A \otimes !A \arrow[r, "coder_A \otimes \rho"] & !!A \otimes !!A
\end{tikzcd}$$

B.5.2 *Lin* as a differential category

Definition B.5.2. The co-dereliction is the category of complete spaces is :

$$coder_E : \begin{cases} E \to !E \\ y \mapsto \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\delta(ty) - delta(0)}{t} \end{cases}$$

According to B.3.21,we have $coder_E(y) : f \mapsto f_1(y)$ when $f = \sum f_k$. So $coder_E = \theta_1 : E \to !E$ (see B.4.4) is well defined, and is a linear bornological map. We just have to show that it verifies the strength and comonad diagrams.

C Reflexive spaces as a quantitative model of Differential Linear Logic

As we have seen in the previous section, complete vector spaces allows us to describe non-linear functions as power series, i.e. programs through a disjunctive sum over n of n-time resource consuming programs. This solve partially our problem : to find a quantitative topological model of Linear Logic.
However, we only have a model of Intuitionist Linear Logic. Indeed, the negation $\neg A$ of a formula of Linear Logic is interpreted in a denotational model by the dual space of the interpretation of A. The dual space is the space of linear maps from A to the dualizing object, which is $\mathcal{L}^b(A, \mathbb{C})$ in our complete or Mackey-complete spaces. Hence, the space corresponding to $\neg\neg A$ is its bornological bidual $\mathcal{L}^b(\mathcal{L}^b(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. To have a model of Linear Logic we would like to have a natural isomorphism between A and$\mathcal{L}^b(\mathcal{L}^b(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$, and this for each one of our object A in our denotational model.

But we know many complete vector spaces which are not isomorphic to their bornological bidual. Indeed, every Banach space F is a complete vector space, and since it is normable, its continuous dual $\mathcal{L}^c(F, \mathbb{C})$ is exactly its bornological dual $\mathcal{L}^b(F, \mathbb{C})$ (see C.2.7). This last one is again normable (by $\|\ldots\|_\infty : \phi \mapsto sup\{\phi(x)| \|x\| \leq 1\}$), so we have again $\mathcal{L}^b(\mathcal{L}^b(F, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}^c(\mathcal{L}^c(F, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ in the category of lctvs and bornological linear maps. From this we deduce that a Banach space is isomorphic to its bornological bidual if and only if it is isomorphic (in the bornological sense) to its continuous bidual. Every Banach space which is not reflexive in the continuous sense is a witness for the fact that Complete spaces do not modelize Linear Logic. For example, the space c_0 of complex sequences converging towards 0, with the supremum norm, is a Banach space. Its dual is l^1, the space of summable sequences, and its bidual is l^∞, the space of bounded sequence. Hence, c_0 is not reflexive.

Our new goal is to refine our previous category into a category where every space is isomorphic to its bornological bidual. Such a space will be called reflexive. Be careful, reflexivity in our setting is not the same notion as usually, as normally a lcvts is called reflexive when it is equal to its continuous bidual. The bornological dual $\mathcal{L}^b(F, \mathbb{C})$ of a tvs E will be written $E^\times$, the continuous dual $\mathcal{L}^c(F, \mathbb{C})$ will be denoted E', and the algebraic dual (ie the space $\mathcal{L}(F, \mathbb{C})$ of all linear functions from E to $\mathbb{C}$) will be denoted $E^\star$. As a result, we will find that the whole category of reflexive spaces and linear maps / power series between them is a quantitative model of DiLL.

The methods I use here are different from those used on complete spaces or convenient spaces. However, some proofs are still very dependent of the fact that a reflexive space is a Mackey-complete space, and it would be nice to simplify them.

C.1 Reflexivity for bornological duals

C.1.1 Terminology

The terms weak topology, or weakly converging refers to $\sigma(E^\times)$, the topology generated by $E^\times$ on E. It differs from the usual convention, when weakly refers to $\sigma(E')$. When nothing is specified, "weakly" here will always refer to $\sigma(E^\times)$.

C.1.2 Weakly-complete and quasi-complete spaces

We have worked with complete spaces (every Cauchy net converge) and Mackey-complete spaces (every Mackey-Cauchy net converges). Luckily enough, we are going to be able to deduce from reflexivity some kind of completeness criterion. To do so, we need a few preliminary definitions.

Definition C.1.1. A lctvs E endowed with a dual F is said to be **weakly complete**, if every Cauchy-net for the topology induced by F on E converges for this topology.

Proposition C.1.2. A lctvs E which is weakly complete wrt E' is complete.

Proof. Remember that a convex subset of E which is closed under the weak topology is closed under the strong topology, see 2.2.1. Consider $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a Cauchy-net in E. It is in particular a weak Cauchy net, hence it does weakly converge towards some $x \in E$. Now consider U as strong 0-neighborhood in E. We know that E has basis of closed convex 0-neighborhood : the topology on E is locally convex, hence it has a basis of 0-neighborhood made with convex sets, and the family of closures of these sets still form a 0 neighborhood. We can suppose that U is convex and closed. Let us now fix γ_0 such that for $\gamma, \gamma' \leq \gamma_0$, we have $x_\gamma - x_{\gamma'} \in U$. But, since U is also weakly closed by 2.2.1, we also have $x - x_{\gamma'} \in U$ for all $\gamma' \leq \gamma_0$. This tells us exactly that our net converges strongly towards x. □

Corollary C.1.3. A lctvs E which is weakly complete wrt $E^\times$ is complete.

Proof. A Cauchy net in E is weakly converging wrt $E^\times$, hence wrt E'. The previous proposition concludes. □

Definition C.1.4. A lctvs E is said to be **quasi-complete** if every bounded Cauchy net converges.

Quasi completeness is not Mackey-completeness. Since a Mackey-Cauchy net is bounded and is a Cauchy net, it is a quasi Cauchy net, thus quasi-completeness implies Mackey-completeness. But the converse is false : being a bounded Cauchy net does not imply being a Mackey-Cauchy net. Consider for example l^1 endowed with its weak topology. See for example [Kha82], 2.3.(ii).

C.1.3 Reflexivity

Here, we want to adapt results known on reflexivity for continuous duals to our reflexivity, the one for bornological duals. Of course, we need now to refine the definition of a weak topology on a lctvs, as we have two legitimate duals to consider. We have the usual weak topology $\sigma(E')$ induced by E' on E, and the bounded weak topology $\sigma(E^\times)$, induced by $E^\times$ on E. One has :

$$\sigma(E') \subseteq \tau(E),\, \sigma(E') \subseteq \sigma(E^\times),\, \sigma(E^\times) \subseteq \tau(\gamma \circ \beta(E)).$$

We first recall briefly the results on reflexivity for continuous duals. A lctvs E is said to be reflexive if there is a linear homeomorphism between E and E'', i.e. δ is surjective from E to E'' and the two spaces bear the same topologies by C.1.6. It can be proved, see [Köt69] 23.5.1, that a space E is reflexive if and only if if and only if it is weakly quasi-complete wrt E' and it is quasi-barreled [7]. We are going to adapt this result to our case, and find a simpler characterization of reflexive (in the bornological meaning) of spaces.

When we consider the bornological dual, things get simpler : it is enough to have equality between the sets E and $E^{\times\times}$ to have a bornological isomorphism between (i.e. an isomorphism in our category of lctvs and linear bornological maps). To understand the proofs in this section, you need notions on polars and the bipolar theorem defined in subsection 2.2.

First, we need to understand the function relating E and $E^{\times\times}$. This function, denoted δ, has several domain, and we will work with it in a different setting in section C.4.

Definition C.1.5. Let us denote $\delta : E \mapsto E^{\times\times}$ the function mapping x to $ev_x : l \mapsto l(x)$. We say that E is **reflexive** when δ is a bornological isomorphism.

Proposition C.1.6.

- $ev_x : E^\times \to \mathbb{C}$ is indeed bornological and linear.
- δ is linear.

[7] A lctvs is quasi-barreled if and only if every bounded barrel is a 0-neighborhood, a barrel being a set which is convex, balanced, absorbing and closed. Complete metrizable spaces are barreled, for example.

- δ is bornological.
- δ is injective.
- δ^{-1} is bornological.

Proof. 1. Clearly, $ev_x(\lambda f + g) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda ev_x(f) + ev_x(g)$, so ev_x is linear. Since a bounded set in $E^\times$ sends a bounded set on a bounded set, and since x is bounded (it is absorbed by every neighborhood of 0 since multiplication by a scalar is continuous), $ev - x$ is bornological.

2. δ is obviously linear, since its image is a space of linear functions.

3. Remember that $E^\times$ is endowed with the bornology of the equibounded : a set is bounded in $E^\times$ if and only if it sends a bounded set of E on a bounded set of $\mathbb{C}$. Consider then a bounded set b in E, and a bounded set B in $E^\times$. Then $\delta(b)(B) = B(b)$ is bounded in $\mathbb{C}$, hence $\delta(b)$ is bounded in $E^{\times\times}$, and δ is bornological.

4. According to 2.9, if two points x and y are different, then there is $l \in E' \subseteq E^\times$ such that $l(x) \neq l(y)$. Thus $ev_x(l) \neq ev_y(l)$ and $\delta(x) \neq \delta(y)$.

5. Now, let $\mathcal{B}$ be a bounded set of $E^{\times\times}$. We want to show that $\delta^{-1}(\mathcal{B})$ is bounded. Consider $l \in E^\times$. Then $l(\delta^{-1}(\mathcal{B})) \subseteq \mathcal{B}(l)$ is bounded in $\mathbb{C}$. $\delta^{-1}(\mathcal{B})$ is scalarly bounded, hence bounded by proposition 2.6. Then δ^{-1} is bornological.

□

Corollary C.1.7. If $\delta : E \mapsto E^{\times\times}$ is surjective, then E is reflexive.

Proof. By proposition C.1.6 and proposition C.1.6. □

This corollary is fundamental, as it allows us to work pointwise to proove the reflexivity of a space : indeed, we only have to worry about the fact that each function of the bidual must be represented by an $x \in E$, and not to worry about the bornologies of the dual and the bidual.

Now we want prove that reflexive spaces are in some way complete. This will help us a lot, since it will help us to integrate or to apply the result of [KM97] to our reflexive spaces. First, we need to adapt the Banach-Alaoglu theorem to our setting : this technical result can be omitted during a quick reading.

Proposition C.1.8 (Bourbaki-Alaoglu Theorem for $E^\times$)**.** Consider E an lctcvs and $\mathcal{U}$ a 0-neighborhood in E. Then $\mathcal{U}^\circ$ is compact in $E^\times$, when $E^\times$ is endowed with $\sigma(E)$.

Proof. When endowed with $\sigma(E)$, $E^\times$ is a sub-lctvs of $\mathbb{C}^E$, endowed with the product topology. If $\mathcal{U}^\circ$ is a compact subset of $\mathbb{C}^E$, it is also a compact subset of $E^\times$.
Now for all $x \in E$, $\mathcal{U}^\circ(\{x\})$ is bounded : since E bears a vector topology, there is $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\lambda x \in \mathcal{U}$, and then $\mathcal{U}^\circ(\{x\}) \subseteq [-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}]$. $C_x = \overline{\mathcal{U}^\circ(\{x\})}$ is then compact in $\mathbb{C}$. By Tychonov theorem, $\prod_{x\in E} C_x$ is compact in $\mathbb{C}^E$, and $\mathcal{U}^\circ \subseteq \prod_{x\in E} C_x$ is relatively compact. If $\mathcal{U}^\circ$ was to be closed, we would have our result.
And luckily enough, $\mathcal{U}^\circ$ is closed in $\mathbb{C}^E$ endowed with the product topology. Indeed, consider a net $(u_j)_{j\in J} \in (\mathcal{U}^\circ)^J$ such that for all $x \in E$, $u_j(x) \to l(x) \in \mathbb{C}$. Then $l : x \mapsto l(x)$ is a linear form on E. Since for all $x \in \mathcal{U}$, for all $j \in J$ we have $|u_j(x)| \leq 1$, we have that l is bornological and in $\mathcal{U}^\circ$. $\mathcal{U}^\circ$ is closed in a compact, it is then compact in $E^\times$ endowed with $\sigma(E)$. □

Theorem C.1.9. If a lctvs E is reflexive then its absolutely convex closed and bounded subsets are weakly compact.

Proof. Consider E a reflexive space, and B an absolutely convex closed and bounded subset of E. We are going to use a version of Bourbaki-Alaoglu theorem for $E^\times$ which is proved below in proposition C.1.8.
B° is a 0-neighborhood in $E^\times$, as the topology on it is the topology of uniform convergence on bounded subsets of E. Then, according to C.1.8, $B^{\circ\circ}$ is compact in $E^{\times\times}$ endowed with $\sigma(E^\times)$. Now as $E = E^{\times\times}$, the two spaces are the same lctvs when each one is endowed with $\sigma(E^\times)$, and δ^{-1} is continuous from $E^{\times\times}[\sigma(E^\times)]$ to $E[\sigma(E^\times)]$. Considering that $B = \delta^{-1}(\delta(B))$ and $\delta(B) \subseteq B^{\circ\circ}$, we have that $\delta(B)$ is relatively compact for $\sigma(E^\times)$, then so is B by continuity of δ^{-1}. B being closed, it is compact.

□

This theorem is also true in the continuous case, where a lctvs is semi-reflexive if and only if absolutely convex closed and bounded subsets are weakly compact. Here, we do not have a converse proof, although we are interested in one as it would give us a characterization of reflexive spaces through a completeness result. The converse proof of continuous spaces does not work here because in the continuous case the bidual E'' is an union of bidual, while it is not the case the the bornological bidual $E^{\times\times}$.

Theorem C.1.10. If the absolutely convex closed and bounded subsets of E are $E^\times$-compact, then E is $\sigma(E^\times)$-quasi-complete.

Proof. This is immediate since compact subsets are complete. □

Corollary C.1.11. A reflexive space is $\sigma(E^\times)$-quasi complete.

Theorem C.1.12. If E is $\sigma(E^\times)$-quasi complete, then its closed and bounded subsets are $\sigma(E^\times)$-compact.

Proof. We know, see [Köt69] 20.9.2, that the $\sigma(E^\times)$ completion of E is $E^{\times\star}$ endowed with the topology induced by $E^\times$. Take now B a bounded and closed subset of E, which is $\sigma(E^\times)$-complete by hypothesis. Then B is isomorphic to the closure of its image $\delta(B)$ in $E^{\times\star}$. But $\overline{\delta(B)} = \prod_{l\in E^\times} \overline{f(B)}$ which is a compact set by Tychonov theorem again. B is then $\sigma(E^\times)$-compact. □

Theorem C.1.13. A $\sigma(E^\times)$-quasi complete space is also Mackey-complete.

Proof. Let us first recall a classical result in topological vector spaces : a Cauchy net converging weakly (for E') does in fact converge. This is due to the fact that a Cauchy net with a limit point converges, and that the weak closure of a convex equals his closure in a locally convex vector space. Consider now E a $\sigma(E^\times)$-quasi complete vector space, and $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a Mackey-Cauchy net in E. There is B a bounded set and complex numbers $\lambda_{\gamma,\gamma'}$ such that $\lambda_{\gamma,\gamma'} \to 0$ and

$$x_\gamma - x_{\gamma'} \in \lambda_{\gamma,\gamma'} B.$$

Let us show that $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ is also a $\sigma(E^\times)$ Cauchy net. Consider $\mathcal{U}$ a 0-neighborhood in $\sigma(E^\times)$. $\mathcal{U}$ contains a finite intersection of $l^{-1}(B(0,\epsilon))$ with $l \in E^\times$, and without loss of generality we can work with $\mathcal{U} = l^{-1}(B(0,\epsilon))$.
l sends a bounded set on a bounded ball in $\mathbb{C}$, so $l(B) \subseteq \lambda B(0,\epsilon)$ for some λ, and $B \subseteq \frac{\mathcal{U}}{\lambda}$. So for γ, γ' big enough, $x_\gamma - x_{\gamma'} \in \mathcal{U}$ and $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ is a $\sigma(E^\times)$-Cauchy net. It is bounded since contained in a dilatation of B ($(\lambda_{\gamma,\gamma'})$ is bounded), and then it converges for $\sigma(E^\times)$, hence for $\sigma(E')$. A Mackey-Cauchy net is in particular a Cauchy net, and thanks to the remark at the beginning of the proof we know that $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ converges. □

Corollary C.1.14. A reflexive space is Mackey complete. Hence, for every absolutely convex bounded set B in a reflexive space E, the vector space E_B endowed with the norm $p_b(x) = inf\{\lambda | \frac{x}{\lambda} \in B\}$ is a Banach space.

We are now allowed to use on reflexive spaces every result we had on Mackey-complete spaces (convenient vector spaces for Kriegl and Michor).

C.1.4 Integration

Next we want to integrate. But our space is not complete. We find an alternative, that is the weak integral. The idea of using this integral can be found in [Gro53], 1.3.

Theorem C.1.15. In a reflexive space, you have a weak integral for continuous functions on compact support. Indeed, for every $f : \mathbb{C} \to E$ continuous, for every $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, there is a $v \in E$ such that for every $l \in E^\times$, $l(v) = \int_K l(f(z))dz$

Proof. Let us check that

$$I : \begin{cases} E^\times \to \mathbb{C} \\ \quad l \mapsto \int_K l(f(z))dz \end{cases}$$

is bornological. Consider B a bounded set in $E^\times$. Then f being continuous, we know that $f(K)$ is a compact, hence a bounded set in E. This allows us to say that $B(f(K)$ is a bounded set in $\mathbb{C}$, and then $I(B) \subseteq \int\limits_K 1dz \times \overline{B(f(K))}$ is bounded. Because I is clearly linear, we conclude that $I \in E^{\times\times}$ and by reflexivity there is $v \in E$ such that $I = ev_v$. □

Corollary C.1.16. One can prove likewise that in a reflexive space, you have a weak integral for bornological functions $f : \mathbb{C} \to E$ on bounded sets of $\mathbb{C}$.

C.2 A monoidal closed category

Now that we have extracted a few properties from the reflexivity condition, we want to show that reflexive spaces form a model of Linear Logic. We write *Lin* for the category of reflexive spaces and bornological linear maps between them. First, we are going to construct the interpretation of the multiplicative constructor, and the monoidal closed category of reflexive spaces.

C.2.1 Preliminary : Hahn-Banach extension theorem for bornological maps

To prove that our spaces $\mathcal{L}(E,F)$ of bornological linear maps are reflexive when the domain is, we are going to look at what happens on spaces $L(E,F)$ of linear maps, and then extend each form of the dual $\mathcal{L}(E,F)$ into a form on $L(E,F)$. This calls for a version of the Hahn-Banach extension theorem adapted to bornological linear maps. Remember that a semi-norm on a vector space is a homogeneous sub-additive map between the vector space and the scalar field.

Theorem C.2.1 (Hahn-Banach Theorem)**.** Let E be a vector space, F a subspace of E and p a semi-norm on E. If $u \in F^\star$ is such that $|u| \leq p_{|F}$, then there exists $\tilde{u} \in E^\star$ extending u such that $|\tilde{u}| \leq p$.

See [Jar81] 7.1.2 for a proof. We want a result similar to the one in [Jar81] 7.2.1. Remember that for every locally convex topological vector space we can find a family of semi-norms generating its topology, and in particular the family of all continuous semi-norms generates the topology. Considering that a semi-norm is bornological on E if and only if it is continuous for its bornological topology, we have :

Proposition C.2.2. The bornological topology of a lctvs E is generated by the family of all the semi-norms on E which are bornological.

Now we want to characterize bornologicality in terms of semi-norms, as in the following property :

Proposition C.2.3 (See [Jar81] 6.5.4)**.** Let E be a lctvs with a defining family of semi-norms $(p_\alpha)_\alpha$, and T a linear maps from E to the scalar field. Then T is continuous if and only if there is ρ and α such that for every $x \in E$:

$$|T(x)| \leq \rho p_\alpha(x)$$

.

From C.2.2, we can then deduce :

Proposition C.2.4. Let E be a lctvs, and T a linear maps from E to the scalar field. Then T is continuous if and only if there is ρ and a bornological semi-norm p such that for every $x \in E$:

$$|T(x)| \leq \rho p(x)$$

.

Theorem C.2.5. Consider E a lctvs and F a subspace of E inheriting from the topology on E. If u is a bornological linear map on F, then it can be extended into a bornological linear map on E

Proof. Thanks to C.2.4, we know that u is bounded by a bornological semi-norm on E. Thanks to the Hahn-Banach theorem C.2.1, we know that we can extend it into a linear map bounded by the same bornological semi-norm. Then the extension of u is again bornological, by C.2.4. □

C.2.2 Bornological linear maps

Let us first explain the linear maps we will be working with.

Definition C.2.6. Consider $l : E \to F$ a linear map between two lcvts. l is said to be **bornological** when it sends every bounded of E towards a bounded of F. Equivalently, l is bornological when for every bounded set b in E, $l(b)$ is bounded in F.

Proposition C.2.7. A continuous linear map is bornological.

Proof. Consider $l : E \to F$ a continuous linear map between two lctvs, and b a bounded set of E. Let us show that $l(b)$ is bounded in F : consider U a 0-neighborhood in E. Then because $l(0) = 0$ and l is continuous we know that $l^{-1}(0)$ contains a 0 neighborhood in E. Thus, there is λ such that $b \subseteq l^{-1}(0)$, and consequently $l(b) \subseteq l(\lambda U) = \lambda l(U)$. $l(b)$ is then bounded and l is bornological. □

Proposition C.2.8. The converse is false in general : a bornological linear map may not be continuous. However, it is true when the topology of the codomain is bornological, i.e. when all bornivorous subsets of the codomain are 0-neighborhood.

Proof. The first assertion is immediate. Suppose now that the topology of E is bornological, and consider $l : E \to F$ a linear bornological function. Consider V a 0-neighborhood in F, and let us show that $l^{-1}(V)$ is bornivorous. This will achieve the proof for the continuity of l. Consider then b a bounded set in E. Since $l(b)$ is bounded, there is $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $l(b) \subseteq \lambda V$. Thus :

$$b \subseteq l^{-1}(l(b)) \subseteq l(\frac{V}{\lambda}) \subseteq \lambda l^{-1}(V)$$

. □

Why do we work with bornological linear maps, and not continuous map for example ? For multiple reasons :

- Because of 2.6, bounded sets interest us as they link strong and weak topologies. This gives us the chance to apply to our lctvs all the results we know on $\mathbb{C}$. Note that this is not the case for open sets : weak and strong topologies differs practically all spaces.
- Because we are finally interested in functions sending holomorphic curves to holomorphic curves. And Kriegl and Michor showed that between Mackey-complete spaces a linear function sends an holomorphic curve on an holomorphic curve if and only if it is bornological. See 7.4 [KM97] and C.3.8 below.

C.2.3 The reflexivity of $\mathcal{L}_s(E, F)$

Let us denote $L_s(E, F)$ the space of *all* linear functions from a lctvs E to a lctvs F, endowed with the topology of simple convergence (the topology whose open sets are the $U_{x,O} = \{f | f(x) \in O\}$ with $x \in E$ and O a 0-neighborhood in F). Likewise, we denote $\mathcal{L}_s(E, F)$ the space of bornological linear functions endowed with the topology of simple convergence. As usual, $\mathcal{L}(E, F)$ is the space of all bornological

linear maps between E and F, endowed with the topology of uniform convergence on sets of E
From the theorem C.2.5, we know that every map $\phi \in (\mathcal{L}_s(E,F))^\times$ can be extended as a map in $L_s(E,F)^\times$. This gives us a reason for trying to understand the dual of $\mathcal{L}_s(E,F)$, and hence its reflexivity, through the dual of $L(E,F)$.

Proposition C.2.9. The bornological dual of $L_s(E,F)$ is pointwise equal to $E \otimes F^\times$.

Proof. First, let us notice that as a topological vector space, $L_s(E,F)$ is exactly $\prod_{\alpha \in A} F$, where A is an algebraic basis for E. Then, his dual is $(L_s(E,F))^\times = \bigoplus_{\alpha \in A} F^\times$. But elements of $\bigoplus_{\alpha \in A} F^\times$ are exactly finite sums of $f \circ ev_x$, with $x \in E$ and $f \in F^\otimes$, which are exactly the elements of $E \otimes F^\times$.

□

In the following proposition, we use an adaptation of Banach-Steinhauss theorem in the Mackey-complete spaces, which can be found in [KM97], proposition 5.18.

Proposition C.2.10. When E is reflexive, then $(\mathcal{L}_s(E,F))^\times = (\mathcal{L}(E,F))^\times$.

Proof. If E is reflexive, then it is Mackey-complete by C.1.13 and C.1.11. By proposition 3.1.1 we know that the bounded sets of $\mathcal{L}(E,F)$ and $\mathcal{L}_s(E,F)$ are the same. Then, $(\mathcal{L}(E,F))^\times$ and $(\mathcal{L}_s(E,F))^\times$ are the same lctvs. □

Proposition C.2.11. Any form of $(\mathcal{L}(E,F))^\times$ can be written as $\sum_{1 \leq i \leq n} l_i \circ ev_{x_i}$ with $l_i \in F^\times$ and $x_i \in E$.

Proof. Consider $z \in (\mathcal{L}(E,F))^\times$. According to theorem C.2.10 $(\mathcal{L}(E,F))^\times = (\mathcal{L}_s(E,F))^\times$, and $\mathcal{L}_s(E,F)$ is a subspace of $L_s(E,F)$, so we can extend z into an element $\tilde{z}$ of $L_s(E,F))^\times$.
But we know that $\tilde{z} = \sum_{1 \leq i \leq n} l_i \circ ev_{x_i}$ with $l_i \in F^\times$ and $x_i \in E$. So $\tilde{z}_{|\mathcal{L}(E,F)} = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \circ ev_{x_{i|\mathcal{L}(E,F)}} = \tilde{z}_{|\mathcal{L}(E,F)}) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \circ ev_{x_{i|\mathcal{L}(E,F)}}$. □

Now we have everything we need to conclude. The proof of the following theorem is inspired by proposition 5.4.12 of [FK88] : they use the same diagram to reason, but their function being continuous the arguments are not the same.

Theorem C.2.12. When E and F are reflexive, $\mathcal{L}(E,F)$ is reflexive.

Proof. We want to show that $\delta : \mathcal{L}(E,F) \to (\mathcal{L}(E,F))^{\times\times}$ is surjective. But when F is reflexive, we have the following diagram, where $\delta_\star$ is bijective :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(E,F) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta_\star"'] & & \mathcal{L}(E,F)^{\times\times} \arrow[dl, "\phi"] \\
& \mathcal{L}(E,F^{\times\times}) &
\end{tikzcd}$$

with

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F)^{\times\times} \to (\mathcal{L}(E,F^{\times\times})) \\ \qquad l \mapsto (x \in E \mapsto (f \in F^\times \mapsto l(f \circ ev_x))) \end{cases}$$

We can check that $(\phi \circ \delta) \circ \delta_\star^{-1} = Id$. So proving that δ is surjective is the same than proving that ϕ is injective. Consider now $l \in Ker(\phi)$, and $z \in (\mathcal{L}(E,F))^\times$. According to the previous proposition, we can write, with $l_i \in F^\times$ and $x_i \in E$:

$$\begin{aligned} l(z) &= l(\tilde{z}_{|\mathcal{L}(E,F)}) \\ &= l(\sum_{1\le i\le n} l_i \circ ev_{x_{i|\mathcal{L}(E,F)}}) \\ &= \sum_{1\le i\le n} l(l_i \circ ev_{x_{i|\mathcal{L}(E,F)}}) \\ &= \sum_{1\le i\le n} \phi(l)(x_i)(l_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

This is true for all $z \in (\mathcal{L}(E,F))^\times$, we have that $l = 0$ and ϕ is injective. Thus δ is surjective and $\mathcal{L}(E,F)$ is reflexive. □

C.2.4 The tensor product

We are now ready to define the tensor product of two lctvs, reflexive when both of them are reflexive.

Definition C.2.13. Consider E and F two lctvs. We are familiar with their algebraic **tensor product** $E \otimes F$, the vector space generated by the family $\{x \otimes y | x \in E, y \in F\}$. We endow this vector space with the finest topology such that the $B_1 \otimes B_2$ are bounded, for B_1 bounded in E and B_2 bounded in F. This is the tensor product of two lctvs. Its topology is nothing but the topology generated by the bornivorous subsets for the bornology $\{B_1 \otimes B_2\}$, ie $\beta(\{B_1 \otimes B_2\}$.

Lemma C.2.14. If E is reflexive, then so is $E^\times$.

Proof. If $E = E^{\times\times}$, then $E^\times = E^{\times\times\times}$ □

Proposition C.2.15. If E is a closed subspace of F, and if F is reflexive, then so is E.

Proof. Consider $l \in E^{\times\times}$. We have that $F^\times \subseteq E^\times$, so l is also a bornological form on $F^\times$. Then by reflexivity of F there is $y \in F$ such that $l(f) = f(y)$ for all $f \in E^\times$. Let us show that $y \in E$. If it is not the case, then by Hahn-Banach separation theorem (see 2.11), we have $u \in F'$ such that $|u(y)| > 1$ and for all $x \in E$ $|u(x)| = 0$. But being continuous u is also bornological, and we have $u(y) = l(u) = l(u_{|E}) = 0$. And we have our contradiction.
Now consider $f \in E^\times$. By C.2.5, f can be extended as a bornological form $\tilde{f}$ in $F^\times$. We have now $l(f) = l(\tilde{f}_{|E}) = \tilde{f}_{|E}(y) = f(y)$ since $y \in E$. We conclude that $l = ev_y$ and E is reflexive. ☐

Lemma C.2.16. If $E^\times$ is reflexive, then so is E.

Proof. If $E^\times$ is reflexive, so is $E^{\times\times}$. But endowed with the $\sigma(E^\times)$-topology, E is a closed subset of $E^{\times\times}$ endowed with the $\sigma(E^\times)$-topology. According to the previous proposition, we have that $E = (E, \sigma(E^\times))^{\times\times}$. But the bounded sets of E and $(E, \sigma(E^\times))$ are exactly the same. Indeed, by 2.6 the bounded sets of E with its first topology are exactly those whose image is bounded by any $l \in E^\times$. But the open sets of E endowed with $\sigma(E^\times)$ are those whose image under any$l \in E^\times$ is open. Hence, the bounded sets of E endowed with $\sigma(E^\times)$ are those absorbed by the sets hose whose image under any $l \in E^\times$ is open, that is to say they are exaclty the same as those of E endowed with its first topology. Then $E^\times = (E, \sigma(E^\times))^\times$, and $E = E^{\times\times}$. ☐

Proposition C.2.17. If E and F are reflexive, then so is $E \otimes F$.

Proof. We have $(E \otimes F)^\times = \mathcal{L}(E, F^\times)$. But if F is reflexive, so is $F^\times$ and because E is reflexive theorem C.2.12 shows that $\mathcal{L}(E, F^\times)$ is reflexive. We just have to apply the preceding lemma to have that $E \otimes F$ is reflexive. ☐

C.2.5 *Lin* is monoidal closed

Theorem C.2.18. $E \otimes F$ verifies the universal property of tensor product in the category of reflexive spaces and bornological linear maps : there is a bilinear bornological mapping $h : E \times F \to E \otimes F$ such that for any bornological bilinear map $f : E \times F \to G$, there is a unique $\tilde{f} : E \otimes F \to G$ linear and bornological such that $f = \tilde{f} \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & E \otimes F \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\
G &
\end{tikzcd}$$

Proof. Consider E, F, G reflexive spaces and f as in the proposition. Defining $\tilde{f}$ by $\tilde{f} : x \otimes y \mapsto f(x, y)$, we see that f is linear and bornological. The uniqueness of f follows from the universal property of $E \otimes F$ in the category of vector spaces and linear map. $\square$

Theorem C.2.19. *Lin* is monoidal closed.

Proof. This follows from C.2.18 and C.2.12. Indeed, for every E, F, G reflexive spaces we want an isomorphism in *Lin* between $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$ and $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G)$, and we want this isomorphism to be natural in F and G. C.2.12 guaranties that $\mathbb{L}(F, G)$ is indeed an object of *Lin*, and C.2.18 that so is $E \otimes F$. The universal property of the tensor product tells us that we have a bijection between $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$ and $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G)$, and that this bijection is linear. By the definitions of the bounded sets on the spaces we consider, we see that this bijection and its inverse are bornological. The naturality of the isomorphism follows. $\square$

C.3 A cartesian closed category

Now that we have our linear category, we want our category of non-linear maps. One of our goal was to have a quantitative model of Linear Logic. We wanted our non linear maps to have a Taylor formula, as good as possible. We went from real-analytic maps to holomorphic maps, and to holomorphic maps to entire maps, that is power series. Here, I expose only the case when the non-linear functions are power series. This part is inspired from [BS71], where the authors describe a theory of holomorphic functions from $\mathbb{C}$ to lctvs, and [Gro53], where Grothendieck use weak integrals to work on holomorphic curves (but for the continuous dual). Kriegl and Michor, in [KM97], have described a theory of holomorphic functions between tvs, but they are limited by the fact that they cannot integrate those functions. Moreover, they work on M-complete spaces, so their result apply to our reflexive spaces thanks to C.1.13, but it makes the proofs more complex. Kriegl and Michor's holomorphic functions verify "locally" a Taylor formula, but for a too weird topology (see 7.19.6 in [KM97]).
In the preceding subsections concerning reflexive spaces, we could have work equally with vector spaces on $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Now, we need our spaces to be vector-spaces over $\mathbb{C}$.

C.3.1 Holomorphic functions in $\mathbb{C}$

Remember what is an holomorphic functions between $\mathbb{C}$ and $\mathbb{C}^n$: it is a complex differentiable function, that a functions such that for every $z \in \mathbb{C}$, the following limit exists :

$$\lim_{w \to 0, w \in \mathbb{C}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

An holomorphic function is going to be infinitely many times differentiable in $\mathbb{C}$, and is going to be analytic. That is, for all $z_0 \in \mathbb{C}$, for all z complex in a small ball around 0, we will have for all $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$$

Moreover, such a function verifies the Cauchy formula and the Cauchy inequality : at 0 for example, we have

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

, and

$$|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}| \leq |\frac{sup\{f(\lambda||\lambda| = r\}}{r^n}|$$

for all sufficiently small r

We are going to define holomorphic functions from $\mathbb{C}$ to a lctvs E, which will be called holomorphic curves, and demonstrate that when E is reflexive, that we have locally a Taylor development and a Cauchy formula. The following paragraphs are inspired from [Gro53] and chapter 7 of [KM97].

C.3.2 Holomorphic curves in lctvs

Definition C.3.1. Consider E a lctvs. We say that a function $f : \mathbb{C} \to E$ is **weakly holomorphic curve** when for all $l \in E^\times$, $l \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is holomorphic.

Then we can talk of the weak derivatives of f as elements of $(E^\times)^\star$: $f^n(z) : l \in E^\times \to (l \circ f)^n(z)$.

Proposition C.3.2. If f is weakly holomorphic, then $f'(z) \in E^{\times\times}$ for all $z \in \mathbb{C}$. If E is reflexive, then f' is a function in E and is again weakly holomorphic.

Proof. Let us show the first point of the proposition. The second point follows immediately. Consider $z \in \mathbb{C}$ and B a bounded set in $E^\times$. The for all $l \in E^\times$,

$$f'(z)(l) = (l \circ f)'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{l \circ f(z+h) - l \circ f(z)}{h}.$$

Consequently, the set $K = \{\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\}_{|h| \leq 1}$ is weakly bounded (a converging net in $\mathbb{C}$ is bounded), then bounded in E. We have then $f'(z)(l) \in \overline{l(K)}$ in $\mathbb{C}$. But $B(K)$ is bounded, and so is $\overline{B(K)}$. Then $f'(l) \subseteq \overline{B(K)}$, and $f' \in E^{\times\times}$. □

Corollary C.3.3. If E is reflexive, then for any weakly holomorphic curve f we have $f^{(n)}(z) \in E$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $z \in \mathbb{C}$.

Proposition C.3.4. If E is reflexive and f is a weakly holomorphic curve in E, then f is bornological.

Proof. Consider B a bounded set in $\mathbb{C}$. For all $l \in E^\times$, $l(f(B)) = (l \circ f)(B)$ is the image in $\mathbb{C}$ of a bounded set by a holomorphic hence continuous function. $f(B)$ is then weakly bounded, and bounded by C.2.10. □

Proposition C.3.5. A weakly holomorphic function is continuous.

Proof. Consider f a weakly holomorphic curve, $z \in \mathbb{C}$, and $U \subseteq \mathbb{C}$ a neighborhood of 0. According to the previous proposition and to the proposition C.1.16, we can weakly integrate f' in E. We have consequently :

$$f(z+h) - f(z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=h} f'(z+\zeta)d\zeta \text{ for all } h \in U.$$

Let us denote K the absolute convex closure of the bounded set $\{f'(z+\zeta) | \zeta \in [0;h]\}$. K is a bounded set, and we have $f(z+h) - f(z) \in h.K$. This gives us the continuity of f (every neighborhood of 0 is going to absorb K). □

Propositions C.3.4 and C.1.16 tell us that we can weakly integrate in E every holomorphic functions on a bounded set. We can then transpose the results on holomorphic functions we have in $\mathbb{C}$ using the weak integral.

Theorem C.3.6. For every holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to E$, we have :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

We could have defined holomorphy otherwise : since we know how to derive a curve $f : \mathbb{C} \to E$, we can say that an homophorphic curve would be a infinitely many times complex derivable function.

Definition C.3.7. A curve $f : \mathbb{C} \to E$ is said to be **strong holomorphic** when it is everywhere complex differentiable.

Proposition C.3.8. A function $f : \mathbb{C} \to E$ is holomorphic if and only if it is weak holomorphic.

Proof. Necessity : See [KM97], proposition 7.4. Consider f a strong holomorphic curve, and $l \in E^\times$. We want to show that for all $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{l\circ f(z+h) - l\circ f(z)}{h} = l \circ f'(z).$$

l is not continuous in general, so we cannot conclude immediately. However, let us fix $z \in \mathbb{C}$. Because f is holomorphic in z, the difference quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, considered as a functions of h, extends to a functions of h defined everywhere on $\mathbb{C}$, and which is holomorphic too. The value in $h = 0$ of this curve is exactly $f'(z)$. Because it is holomorphic, this function is locally lipschitzian. There is a neighborhood U of 0 and $k > 0$ such that for every $h \in U$, and every $l \in E^\times$:

$$|\frac{l \circ f(z+h) - l \circ f(z)}{h} - l \circ f'(z)| \leq k.h$$

.

Sufficiency. See [Gro53], Theorem 1 (we could have proceed as is [KM97] 7.4, the proof there works for all Mackey-complete spaces). Suppose f is a weak holomorphic curve. Then for all $l \in E^\times$, and thanks to C.3.2, we have :

$$\begin{aligned} \frac{l \circ f(z+h) - l \circ f(z)}{h} - l \circ f'(z) &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} l(f'(\zeta)) - (l \circ f)'(z) d\zeta \\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} l(f'(\zeta)) - l(f'(z)) d\zeta \end{aligned}$$

Denote K the absolutely convex closed closure of $\{f'(\zeta) - f'(z) | \zeta \in [z; z+h]\}$. Then $l(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)) \in l(K)$ for all $l \in E^\times$, and thanks to Hahn-Banach separation theorem 2.2.2 we have that $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \in K$. But since f' is strongly continuous, for each absolutely convex closed neighborhood of 0 $\mathcal{U}$ in E, we have $K \subseteq U$ for h small enough, and we have our result. □

C.3.3 Power series and holomorphic functions between lctvs

Holomorphic functions are not interesting us for themselves. As said before, we want a unique Taylor decomposition everywhere of our non-linear function. We are going to define power series independently of our results on holomorphic functions,

and then use the fact that these power series will be holomorphic.
In $\mathbb{C}$, a power series is an everywhere converging sum $\sum_n a_n z^n$. We know that it implies that this sum is going to converge uniformly on every bounded all, and is going to be holomorphic.
Let us try to do something equivalent between lctvs. The problem is that there is no way to raise an element to the power n in a tvs. We are going to look to $a_n z^n$ as a n-homogeneous function instead. The use of the Cauchy formula in the proofs here is inspired from [BS71], where the authors work on Gateau-holomorphic functions between lctvs.

Definition C.3.9. Let us denote $\mathcal{H}^n(E,F)$ the space of **monomials of degree** n from E to F, i.e. the set of maps f such that there exists a bornological and symmetric n-linear mapping $\tilde{f}$ verifying $f(x) = \tilde{f}(x,...,x)$.

When f_k is a k-monomial, we will also denote by f_k the k-linear function from which f_k come. Hence $f_k(x) = f_k(x^k)$, and $f_k(x_1,...,x_k)$ is the image of the k-tuple $(x_1,...,x_k)$ by f_k.

Remark C.3.10. The n-monomials are exactly the smooth n-homogeneous function in the sense of Frölicher, see [KM97] 5.16.1.

Definition C.3.11. We say that a function $f : E \to F$ is a **power series** when f is pointwise equal to a converging sum over $n \in \mathbb{N}$ of n-monomials, and when this sum converge uniformly on bounded subset of E.

$$\text{For all } x \in E,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \text{ with } f_n \in \mathcal{H}^n(E,F)$$

The uniform convergence criteria means that for all B bounded in E, for all neighborhood of 0 U in F, there is $N \in \mathbb{N}$ such that $\forall x \in B \sum_{n\geq N} f_n(x) \in U$.

Definition C.3.12. We write $S(E,F)$ the space of power series between E and F, and we endowed it with the topology of uniform convergence on bounded subsets of E.

One can just think of a power series as $f = \sum_n f_n$, and the converging hypotheses are just here to guarantee that everything works fine regarding holomorphy, cartesian closedness, or reflexivity.

Proposition C.3.13. All functions in $S(E,F)$ are bornological.

Proof. Consider $f = \sum f_k \in S(E,F)$, B a bounded set in E, and U a 0-neighborhood in F We know that $\sum f_k$ converges uniformly, hence weakly uniformly, on B. Then there is N such that $f - \sum_{k=0}^{N} f_k)(B) \subseteq U$. Moreover, each of the f_k sends B on a bounded sets, thus $(\sum_{k=0}^{N} f_k)(B)$ is a finite sum of bounded subsets, hence a bounded subset. Then we have

$$f(B) \subseteq \lambda U$$

for some scalar λ. We have our result. □

Now we want to show that a power series sends a weak holomorphic curve onto a weak holomorphic curve C.3.19. This result is quite intuitive, as it follows what happens in $\mathbb{C}$, but it asks for a few technical lemmas, mostly coming from [KM97]. The difficulties come from the fact that we have to get back to metrizable complete spaces to reason as we would have done in $\mathbb{C}$. This result is necessary thought because it leads to the Cauchy formula C.3.27 which is used a lot when working on the exponential. The reader who do not want to worry about these lemmas can jump directly to theorem C.3.19.

Definition C.3.14. A function $f : E \to F$ between two lctvs is **holomorphic** when it sends an holomorphic curve onto an holomorphic curve.

Lemma C.3.15. See [KM97] 7.6. A function in a Mackey-complete space E is an holomorphic curve if and only if it factors locally in an holomorphic curve into E_B, for some absolutely convex bounded set B.

Proof. Consider f an holomorphic curve, $z \in \mathbb{C}$ and W a compact neighborhood of z. Let us denote B the absolutely convex closed closure of $f(W)$. From the Cauchy formula and 2.2.2 we have that for r small enough :

$$\frac{r^k}{k!} c^{(k)}(z) \in B.$$

Thus for w close enough to z in $\mathbb{C}$,

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{w - z}{r} \right)^k \frac{r^k}{k!} c^{(k)}(z) \in \sum_{k \geq 0} \left(\frac{w - z}{r} \right)^k B.$$

This is equal to $c(w)$, and gives us that $c(w) \in E_B$ for w close enough to z. The converse proposition is immediate. □

Lemma C.3.16. See [KM97] 7.19 . If E and F are reflexive spaces, then a function $f : E \to F$ is holomorphic if and only if for all $l \in F^\times$ and B bounded absolutely convex in E, $l \circ f : E_B \to \mathbb{C}$ is holomorphic.

Proof. The results follows from the preceding lemma, and from the fact that a weak holomorphic curve is also strongly holomorphic (see C.3.8). □

Proposition C.3.17. See lemma 7.14 in [KM97]. Consider E is a complete metrizable space (hence a space verifying Baire property), and for each $k \in \mathbb{N}$ f_k a bornological k-linear symmetric scalar valued function on E. Then the following facts are equivalent :

1. The power series $\sum f_k(x^k)$ converges pointwise on an absorbing subset of E,
2. The set $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on a 0-neighborhood
3. The set $\{f_k(x_1, ..., x_k)\}$ is bounded on some neighborhood of 0
4. The power series $\sum f_k(x^k)$ converges absolutely on an absorbing subset of E

This is just saying that, as soon as the codomain is complete and metrizable and the domain is $\mathbb{C}$, a pointwise converging power series is bounded, and converges uniformly somewhere. This seems quite intuitive, but we cannot get rid of the metrizable hypothesis on E.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Since the domain of the f_k is $\mathbb{C}$, their bornologicality implies their continuity. Hence, the sets

$$A_{K,r} = \{x \in E | \; |f_k(x^k)| \leq K r^k \text{ for all k}\}$$

are closed. Moreover, they do recover E by hypothesis. Then, by Baire property, there is an $A_{K,r}$ whose interior is nonempty. Consider $x_0 \in A_{K,r}$ and V a neighborhood of 0 such that $x_0 - U \subseteq A_{K,r}$. By algebraic manipulations, see lemma 7.13 of [KM97], we get for all $x \in V$ $|f(x^k)| \leq K\lambda^k$ for some $\lambda > 0$. Then $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on $\frac{V}{\lambda}$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Suppose $\{f_k(x^k)\}$ is bounded on a 0-neighborhood U. We have

$$\begin{aligned}
f(x_1, ..x_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\epsilon_1, ...\epsilon_k = 0}^{1} (-1)^{k - \sum \epsilon_j} f((\sum \epsilon_j x_j)^k) \\
&\leq \frac{1}{k!} \sum_{\epsilon_1, ...\epsilon_k = 0}^{1} (\sum \epsilon_j)^k \left| f\left(\left(\frac{\sum \epsilon_j x_j}{\sum \epsilon_j}\right)^k\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{k!} \sum_{\epsilon_1, ...\epsilon_k = 0}^{1} (\sum \epsilon_j)^k C \\
&\leq \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j^k C \\
&\leq C (2e)^k
\end{aligned}$$

Hence $\{f_k(x_1, ..., x_k)\}$ is bounded on $\frac{U}{2e}$.
(3) $\Rightarrow$ (4) If $\{f_k(x_1, ..., x_k)\}$ is bounded on U, the power series converges absolutely

on rU, for $0 < r < 1$.
(4) ⇒ (1) is obvious. □

Lemma C.3.18. See lemma 7.17 in [KM97]. Consider E a metrizable complete vector space, $\sum f_k$ a power series from E to $\mathbb{C}$ converging pointwise on a neighborhood of 0, and $a(z) = \sum a_n z^n$ a power series from $\mathbb{C}$ to E, $a_n \in \mathbb{E}$ converging on a 0-neighborhood in $\mathbb{C}$. Then the composite of the two power series $\sum f_k(a(z))$ is a pointwise converging power series around 0.

Proof. This proof is exactly the one you can find in [KM97].By the preceding lemma there is U a 0-neighborhood in E such that $\{f_k(x_1, \ldots, x_k) | k \in \mathbb{N}, x_j \in U\}$ is bounded. Since the series $\sum a_n z^n$ converges, there is r such that for all n $a_n z^n \in U$. Then, for $|z| < \frac{r}{2}$:

$$\begin{aligned} f(a(z)) &= \sum_k \sum_{n_1} \ldots \sum_{n_k} f(a_{n_1}, \ldots a_{n_k}) z^{n_1 + \ldots n_k} \\ &= \sum_n \sum_k \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} f(a_{n_1}, \ldots a_{n_k}) z^{n_1 + \ldots n_k} \end{aligned}$$

This permutations are allowed because the $f(a_{n_1}, \ldots a_{n_k})$ are bounded, and the series upon is absolutely converging in $\mathbb{C}$.

□

Theorem C.3.19. A power series between two reflexive spaces E and F sends an holomorphic curve on an holomorphic curve.

Proof. Consider $f \in S(E, F)$. According to C.3.16, we can suppose that E is a Banach space and F is $\mathbb{C}$. But then, composing f with an holomorphic curve into E, we are just composing f with a curve which is locally a power series. Our result stems from the preceding lemma. □

C.3.4 The product of reflexive spaces

Definition C.3.20. The **cartesian product** $E \times F$ of two locally convex topological vector space E and F is the vector space $E \times F$ endowed with the product topology, i.e. the topology generated by the $U_1 \times U_2$ where U_1 is a 0-neighborhood in E and U_2 is a 0-neighborhood in F.

Definition C.3.21. The direct sum $E \oplus F$ of two locally convex topological vector space E and F is the vector space $E \times F$ endowed with the topology generated by the $U_1 \times 0$ and the $0 \times U_2$ where U_1 is a 0-neighborhood in E and U_2 is a 0-neighborhood in F.

Proposition C.3.22. The dual of $E \times F$ is $E^\times \oplus F^\times$, and the dual of $E \oplus F$ is $E^\times \times F^\times$.

Proof. Consider $l \in (E \times F)^\times$. Then $l_{E\times\{0\}} \in E^\times$, and $l_{\{0\}\times F} \in F^\times$, so $l \in E^\times \oplus F^\times$. Conversely, if $l = (l_1, l_2) \in E^\times \oplus F^\times$, then one can define for $(x, y) \in E \times F$ $l(x, y) = l_1(x) + l_2(y)$. Then we easily see that l is linear, and it is bornological since the bounded sets of $E \times F$ are the $B_1 \times B_2$ where B_1 is a bounded set in E and U_2 is a bounded set in F.
The topology of $(E\times F)^\times$ is generated by the $U_{B_1\times B_2,\epsilon} = \{f \| f(B_1 \times B_2)| < \epsilon\}$, while the topology of $E^\times \oplus F^\times$ is generated by the $U_{B_1,\epsilon_1} \times \{0\}$ and the $\{0\} \times U_{B_2,\epsilon_2}$. But $U_{B_1,\epsilon_1} \times \{0\} \subseteq U_{B_1\times B_2,\epsilon}$ and $U_{B_1\times\{0\},\epsilon_1} \subseteq U_{B_1,\epsilon_1}$, then the two topologies are the same.
The proof that $(E \oplus F)^\times = E^\times \times F^\times$ is done likewise. □

Corollary C.3.23. When E and F are reflexive, then so are $E \times F$ and $E \oplus F$.

Definition C.3.24. When I is an ordered set, when for all $i \in I$ E_i is a lctvs, then we can define $\prod_{i\in I} E_i$ as the vector space product over I of the E_i, endowed with the topology having as a 0 basis the $pr_j^{-1}(U_i)$ with U_i a 0-neighborhood in E_i. We define $\oplus_{i\in I} E_i$ as the direct sum of the vector spaces E_i, endowed with the topology having as a basis at 0 the unions of the $\{0\} \times ...\{0\} \times U_i \times \{0\}...$, where $i \in I$ and U_i is a 0-neighborhood in E_i.

Proposition C.3.25. Bounded sets in $\oplus_{i\in I} E_i$ are finite sums of bounded sets $B_i \subseteq E_i$ and bounded sets in $\prod_{i\in I} E_i$ are product over $i \in I$ of bounded sets $B_i \subseteq E_i$.

C.3.5 Convergence of power series

Our final goal is to prove that the category of reflexive spaces and power series between them is a cartesian closed category. This will give us the Seely isomorphism in our model of Linear Logic. First, we need to extract a few more properties from our non-linear maps. From now on, we suppose lctvs to be mentioned to be reflexive, and every integral to be written to be a weak integral.

Proposition C.3.26. If $f = \sum f_k$ is a power series between E and F, then for every $x \in E$, for every $k \in \mathbb{N}$, the n-th derivative in 0 of the curve $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ is $n! f_n(x)$.

Proof. Because E carries a vector topology, the set $\{\lambda x \| \lambda| < 1\}$ is bounded. Then $\sum f_k(\lambda x)$ converges uniformly for $|\lambda| < 1$, and we have $(\lambda \mapsto f(\lambda x))^{(n)}(0) = n! f_n(x)$. □

Proposition C.3.27. Every power series $f \in S(E, F)$ verifies a Cauchy formula.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

Proof. For every $x \in E$, $\lambda \mapsto \lambda x$ is an holomorphic curve into E, then $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ is an holomorphic curve into F by C.3.19. This curve verifies a Cauchy formula, as every holomorphic curve in a reflexive space by C.3.6. The previous proposition gives us the final result. $\square$

Remark C.3.28. In fact, every power series which is converges weakly (wrt $F^\times$) uniformly on bounded sets of E verifies the Cauchy formula. Proposition C.3.26 can be adapted to these functions, as $F^\times$ is point separating. These power series admit weak derivatives, and they verify likewise the Cauchy formula above.

Corollary C.3.29. If U is an absolutely convex 0-neighborhood, and $r > 0$ is such that $f(rU) \subseteq B$ with B an absolutely convex closed bounded set, then for all k we have $f_k(U) \subseteq \frac{B}{r^k}$.

Proof. Under the hypothesis, and because we are working with a weak integral, we have for all $l \in F^\times$ $l(f_k(U)) \subseteq \frac{l(B)}{r^k}$. But B being closed and convex, we know thanks to 2.2.2 that it means that $f_k(U) \subseteq \frac{B}{r^k}$. $\square$

Corollary C.3.30. If $f \in S(E,F)$, then the development of f as a sum over k of k-monomials is unique.

Now we are going to explain two consequence of the Cauchy formula for power series. They are very simple and practical, as they link weak convergence and strong convergence for power series.

Proposition C.3.31. Consider $f_k, k \in \mathbb{N}$ k-monomials from E to F. If $\sum l \circ f_k$ converges pointwise on E for every $l \in F^\times$, then $\sum f_k$ converges pointwise on E

Proof. Let us fix $x \in E$, and $\lambda \in \mathbb{C}$ with $|\lambda| > 1$. $\sum l \circ f_k(\lambda x)$ converges for every $l \in F^\times$, hence the set $l(\{f_k(\lambda x)\})$ is bounded in $\mathbb{C}$. By 2.6, we know it means that $\{f_k(\lambda x)\}$ is bounded in F. Let us write B for the closure of this sets, which is still bounded by 2.7.
Now consider U a 0-neighborhood in E and μ such that $B \subseteq \mu U$. Let N be a natural number such that $|\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}| < \mu$. Then we have $\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x) \subseteq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} B \subseteq U$, thus $\sum f_k(x)$ converges. $\square$

Proposition C.3.32. Consider $f_k, k \in \mathbb{N}$ k-monomials from E to F. If $\sum l \circ f_k$ converges towards $l(f)$ uniformly on bounded subsets of E for every $l \in F^\times$, and if f is bornological, then $\sum f_k$ converges uniformly on bounded subsets of E.

Proof. Let us fix B_0 a bounded set in E, and U a 0-neighborhood in F. We want to find $N \in \mathbb{N}$ such that $(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(B_0) \subseteq U$. From C.3.28, we know that $f = \sum f_k$

still verifies a Cauchy formula. Thus, we have $f_k(B_0) \subseteq \frac{f(2B_0)}{2^k}$ for every k, hence $(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)(B_0) \subseteq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) f(2B_0)$. Since for some μ, $f(2B_0) \subseteq \mu U$ and $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \to 0$, we have our result. $\square$

During this proof, we proved :

Proposition C.3.33. If $f = \sum f_k$ is a power series in $S(E,F)$, then the partial sums $\sum_{k=1}^{N} f_k$ Mackey-converge towards f in $S(E,F)$: there is B a bounded set in $S(E,F)$ and a sequence of positive reals (λ_n) decreasing towards 0 such that :

$$\forall N, (\sum_{k=1}^{N} f_k - f) \in \lambda_N B.$$

We still need another tool to work on our power series. The last proposition help us to go from weak convergence to strong convergence, the following will allow us to go from pointwise convergence to uniform convergence, under certain conditions.

Proposition C.3.34. Consider $\sum_k f_k : E \to F$ a pointwise converging series of bornological k-monomials. If the sum converges towards a bornological function, then the sum does converge uniformly on the bounded sets of E.

Proof. Let us fix $l \in F^\times$. For every $x \in E$, $\sum l \circ f_k(x)$ converges towards $l \circ f(x)$ where $f : E \to F$ is bornological. Consider B a bounded set. Then, according to C.3.17, the power series $\sum l \circ f_k(x)$ converges uniformly on E_B (as it is a Banach space, see C.1.14), hence on B. We have proved that $\sum_k f_k$ converges weakly uniformly on bounded sets. ByC.3.32, we know that it converges (strongly) uniformly on bounded subsets. $\square$

C.3.6 Quant is cartesian closed

Now before proving that reflexive spaces and power series between them are a cartesian closed category, we should check that it is indeed a category.

Proposition C.3.35. The composition of two power series is a power series.

This proof is both an adaptation of what happens in formal power series (see [Hen88] chapter 1), and an adaptation of the fact that you can compose two absolutely convex power series in $\mathbb{C}$, where they converge absolutely. We explain what happens in the case of monomials in lctvs, and go back to the scalar case thanks to C.3.31.

Proof. Consider $f = \sum f_k \in S(E,F)$ and $g = \sum g_n \in (F,G)$ two power series between reflexive spaces. Let us fix $x \in E$. By definition of g, we have $g \circ f(x) = \sum_n g_n(f(x))$. Let us now fix n. But g_n is a n-monomial from E to F, coming from a n-linear symmetric application. Applied to any finite sum it gives :

$$g_n(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_m=n} \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_m} g_n(y_1^{j_1}, y_2^{j_2}, \dots y_m^{j_m})$$

where $\binom{n}{j_1,j_2,\ldots,j_m} = \frac{n!}{j_1!j_2!\ldots j_m!}$. Now the function

$$x \mapsto g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \dots f_m(x)^{j_m})$$

is a $(n \times (\sum_{k=0}^{m} k \times j_k))$ monomials. This is easy to see when in $\mathbb{C}$ when $g_n : y \mapsto y^n$ and $f_k : x \mapsto x^k$: then $g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \dots f_m(x)^{j_m}) = (x^{j_0} x^{j_1} x^{j_2} \dots x^{j_m})^n$. In our topological space, we use the remark C.3.10, saying that bornological n-monomials and smooth n-homogeneous functions are the same thing. Here

$$x \mapsto g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \dots f_m(x)^{j_m})$$

is clearly a $(n \times (\sum_{k=0}^{m} k \times j_k))$-homogeneous monomial, and it takes a smooth curve to a smooth curve when so does g_n and the f_k. Let us write $h_{n,m}$ for

$$\sum_{\substack{j_0+j_1+j_2+\ldots+j_m=n \\ j_1,\ldots j_n \in \mathbb{N}}} g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \dots, f_m(x)^{j_m})$$

.

Can we write $g_n(f(x)) = \lim_{m\to\infty} h_{n,m}(x)$? Yes, because g is bornological, we can show as in C.3.33 : if

$$(\sum_{k=0}^{m} f_k - f) \in \lambda_m B$$

then

$$g_n(\sum_{k=0}^{m} f_k(x)) - g_n(f(x)) \in (\lambda_m)^n g(B(x)).$$

Since $g(B(x))$ is bounded in F, for every neighborhood of 0 in F, there is some rank m for wich $g_n(\sum_{k=0}^{m} f_k(x)) - g_n(f(x))$ will be included in this neighborhood.

Note that all the monomials in $g_n(f(x))$ are of degree n a multiple of n.

So

$$g(f(x)) = \sum_n \sum_{j_0+j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_0, j_1, j_2, \dots} g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \dots, f_m(x)^{j_m}, \dots) = \sum_n \lim_{m\to\infty} h_{n,m}(x).$$

If we can permute these sums, we would have

$$g(f(x)) = \sum_N \sum_{n \leq N} \sum_{\substack{j_0+j_1+j_2+\ldots=n,\\ (n\times(\sum_{k=1}^{\infty} k\times j_k))=N}} \binom{n}{j_0, j_1, j_2, \ldots} g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots).$$

and this would be a pointwise converging power series. Note that the monomial of degree $N > 1$ is a finite sum : we only collect terms from the $g_n(f(x))$ for $n \leq N$. The constant monomial for $N = 0$ is $\sum_n g_n(f_0)$, and converges since it equals $g(f(0)$.

Now why can me make this sum in $g(f(x))$ commutes ? Let us fix $x \in E$, and $l \in G$. We proceed like in the proof of C.3.39. We want to permute

$$l(g(f(x))) = \sum_n \sum_{j_0+j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_0, j_1, j_2, \ldots} l(g_n(f_0(x)^{j_0}, f_2(x)^{j_2}, \ldots)).$$

But

$$\sum_n \sum_{j_0+j_1+j_2+\ldots=n} \binom{n}{j_0, j_1, j_2, \ldots} |l(g_n(f_0^{j_0}, f_1(x)^{j_1}, f_2(x)^{j_2}, \ldots))|$$

does converge absolutely. Then according to Fubini theorem, we can permute this sum. It converges weakly, hence strongly by C.3.31.

Now $g \circ f$ is a pointwise converging series, and a bornological function because both f and g are. According by C.3.34, $g \circ f$ converges uniformly on bounded subsets of E, we have then $g \circ f \in S(E, G)$

□

Let us denote *Quant* the category of reflexive spaces and power series between them. Remember that we endow $S(E, F)$ with the topology of uniform convergence on bounded subsets of E. The first thing you want to do for cartesian closedness is to prove that the space of non-linear function is still an object of our category.

Proposition C.3.36. $S(E, F)$ is a locally convex topological vector set as soon as F is a reflexive lctvs.

Proof. A 0-neighborhood in $S(E, F)$ contains some

$$\mathcal{U}_{B,U} = \{f | f(B) \subseteq U\}$$

where B is a bounded set in E and U is a 0-neighborhood in F. Those sets are clearly convex when the 0-neighborhood in F are. The sum of two such sets $\mathcal{U}_{B_1,U_1}$ and $\mathcal{U}_{B_2,U_2}$ contains $\mathcal{U}_{B_1 \cap B_2, U_1 + U_2}$, and $U_1 + U_2$ is a 0-neighborhood when F is a locally convex topological vector spaces, hence addition is continuous. Finally, multiplication by a scalar is continuous since every power series is bornological (see C.3.4 and C.3.19). □

Theorem C.3.37. The space $S(E,F)$ is reflexive when E and F are.

Proof. We proceed exactly like in the proof of the reflexivity of $\mathcal{L}(E,F)$ (see C.2.12). For $S(E,F)$ to be reflexive, we need

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{S}(E,F)^{\times\times} \to (\mathcal{S}(E,F^{\times\times})) \\ \qquad l \mapsto (x \in E \mapsto (f \in F^{\times} \mapsto l(f \circ ev_x))) \end{cases}$$

to be injective. However, $S(E,\mathbb{C})^{\times} \subseteq \mathcal{L}(E,\mathbb{C})^{\times}$, hence every $z \in Ker(\phi)$ can be written as the restriction of $\sum_{1\leq i\leq n} f_i \circ ev_{x_i}$ to $S(E,F)$. By definition of ϕ, l is going to be zero exactly on these kind of maps. Then $Ker(\phi) = \{0\}$, ϕ is injective, and $S(E,F)$ is reflexive. □

During this proof, we have shown :

Corollary C.3.38. Any form of $(S(E,F))^{\times}$ can be written as $\sum_{1\leq i\leq n} f_i \circ ev_{x_i}$ with $f_i \in F^{\times}$ and $x_i \in E$.

Theorem C.3.39. For reflexive spaces E, F, and G : $S(E\times F,G) \simeq S(E,S(F,G))$.

Proof. We know thanks to C.3.23 and C.3.37 that the spaces considered are all reflexive. Let us first notice that if the spaces are equal, the topologies on these are the same : synthetically, sending $B_1 \times B_2$ on a weak 0-neighborhood U is the same that sending B_1 on a function which will send B_2 on U. This gives us a homeomorphism, hence a bornological isomorphism, between the two spaces.
We want to show that

$$\phi : \begin{cases} S(E\times F,G) \to S(E,S(F,G)) \\ \qquad \sum f_k \mapsto \left(x \mapsto \left(y \mapsto \sum_n \sum_m \binom{n+m}{n} f_{n+m}(\underbrace{(x,0),\dots,(x,0)}_{n \text{ times}}, \overbrace{(0,y),\dots,(0,y)}^{m \text{ times}}) \right) \right) \end{cases}$$

and

$$\psi : \begin{cases} \qquad S(E,S(F,G)) \to S(E\times F,G) \\ \sum_n (f_n : x \mapsto \sum_m f_{n,x,m}) \mapsto \left((x,y) \mapsto \sum_k \sum_{n+m=k} f_{n,x,m}(y) \right) \end{cases}$$

are well defined, that each one is inverse of one another, are that they are linear and bornological.
A few lines of calculus easily show that ϕ and ψ are inverse of one another. The difficulty is in showing that their image is indeed made of power series. We will do it on ψ, the proof for ϕ using the same tools and being easier.

Here, we are going to go back to what happens in the scalar case, and use the Fubini theorem on absolutely converging sums to permute our sums. Then, we will return to our power series converging uniformly thanks to C.3.34. Consider indeed a function $f \in S(E, S(F,G))$. Then f can be written as $\sum_n (f_n : x \mapsto \sum_m f_{n,x,m})$, each f_n being a bornological p-monomial from E to $S(F,G)$, and each $f_{n,x,m}$ being a bornological m-monomial from F to G. Let us fix $l \in G^\times$. We know that for all $y \in F$, $\theta = l \circ ev_y$ is a bornological form on $S(E,F)$.

Moreover, because f is in particular a pointwise converging power series, hence weakly converging, we know that $\sum_n \theta\left(\sum_m f_{n,x,m}\right) = \sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges for every $x \in E$. Let us fix x and y. Then for any $\lambda \in \mathbb{C}$ bigger in module than 1, we have that $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,\lambda x,m}(\lambda y)$ converges. Hence, because we are in $\mathbb{C}$, the double sequence $(l \circ f_{n,\lambda x,m}(\lambda y))_{n,m}$ is bounded, and $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges absolutely.

Now is the time for Fubini theorem to intervene. Thanks to Fubbini theorem, we know that in $\mathbb{C}$ we can permute absolutely converging double series. Then $\sum_k \sum_{n+m=k} l \circ f_{n,x,m}(y)$ converges and equals $\sum_n \sum_m l \circ f_{n,x,m}(y)$. The function $(x,y) \mapsto \sum_{n+m=k} f_{n,x,m}(y)$ is indeed a bornological k-monomial : you can prove it by algebraic manipulations on monomials or use C.3.10. Hence $\psi(f)$ a weakly pointwise converging power series. Thanks to C.3.31, we see that is converges pointwise strongly.

To see that $\psi(f)$ converges uniformly on bounded subsets of E, we just have to use the fact that it is bornological : f is bornological thanks to C.3.13, and $\psi(f)$ sends $B_1 \times B_2$ on $f(B_1)(B_2)$. Now we can use the fact a pointwise converging power series which converges towards a bornological function converges uniformly on bounded subsets its codomain (see C.3.34). We conclude that $\psi(f) \in S(E \times F, G)$. □

Theorem C.3.40. *Quant* is a cartesian closed category.

Proof. The theorem follows direclty from the preceding proposition and from C.3.37. □

C.4 The exponential

We have our linear category and our non-linear one, we miss the adjunction between the two. This adjunction results in a monad $! : Lin \to Lin$, which modelize the exponential constructor of Linear Logic. As the adjunction will be between a right adjoint from *Quant* to *Lin*, and the oblivion functor $Lin \to Quant$ as left adjoint, we will right also $! : Quant \to Lin$ for our right adjoint. The exponential here differs from what happens in convenient spaces (see [BET10]), or complete spaces (see section B), as we do not have to complete in some way our exponential.

Definition C.4.1. We write $! : Quant \to Lin$ for the functor sending a reflexive space E on $S(E,\mathbb{C})^\times$, and a power series $f \in S(E,F)$ on :

$$!f : \begin{cases} S(E,\mathbb{C})^\times \to S(F,\mathbb{C})^\times \\ \qquad\qquad \phi \mapsto (g \in S(F,\mathbb{C}) \mapsto \phi(g \circ f)) \end{cases}$$

Remember that $!E = S(E,\mathbb{C})^\times$ bears the topology of uniform convergence on bounded subsets of $S(E,\mathbb{C})$. It is a lctvs, and clearly it is a reflexive space. One can note that this exponential, contrary to what happens in other models of Linear Logic, isn't built on an enumerable accumulation procedure but is constructed as some space of continuations over the king of programs interesting us.

We want now to show the adjunction between *Quant* and *Lin* (see C.4.5). For this, we are going to need to work on δ, and show that it is a power series.

Proposition C.4.2. Let us write θ_n for the function $x \in E \mapsto (f = \sum f_k \in S(E,\mathbb{C}) \mapsto f_n(x))$. Then for all $x \in E$, $\theta_n(x) \in !E$, and θ_n is a bornological n-monomial from E to $!E$.

Proof. θ_n is well defined thanks to the uniqueness of the development of a power series. Besides, $\theta_n(x)$ is clearly linear and bornological, since bounded sets of $S(E,\mathbb{C})$ are equibounded.
Now θ_n results from the n-linear symmetric bornological function $(x_1, ..x_n) \mapsto (f \mapsto f_n(x_1, ..x_n)))$. Again, this function is bornological by definition of the bornology on $!E$. Thus, θ_n is a bornological n-monomial. $\square$

Proposition C.4.3. $\delta : E \to !E$ defined by $\delta_x : f \mapsto f(x)$ is in $S(E, !E)$. That is, $\delta = \sum_k \theta_k$ is a power series and converges uniformly on bounded sets of E.

Proof. For every $f \in S(E,\mathbb{C})$, for every $x \in E$ we have $\delta_x(f) = f(x) = \sum f_k(x) = \sum \theta_k(x)(f)$. When we fix x, pointwise we have $\delta_x = \sum \theta_k(x)$. Do we have this equality in $!E$? That is to say, considering the topology of E, do we have uniform convergence on every bounded sets of $S(E,\mathbb{C})$ of $\sum \theta_k(x)$. Indeed, thanks to the Cauchy formula : consider B a bounded set of $S(E,\mathbb{C})$, and b an absolutely convex closed subset of E containing x. For every $f \in S(E,\mathbb{C})$, $f(x) \in B(2b)$, which is a bounded set in $\mathbb{C}$: $|f(x)| \leq M$ or every $f \in S(E,\mathbb{C})$. Then according to the Cauchy formula (see C.3.27), for every k and f we have $|f_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}$. We have $|\sum \theta_k(B)| \leq \left(\sum_k \frac{1}{2^k}\right) M$, and uniform convergence of this sum.

From this we can conclude that pointwise, we have $\delta = \sum \theta_k$. We know that the θ_k are bornological k-monomials, let us just check that we have uniform convergence on bounded subsets of E. Let us fix b a bounded subset of E, and $\mathcal{U}_{B,\epsilon}$ a 0-neighborhood in $!E$. We want to find N such that for all $x \in b$, $\sum_{k=N}^{\infty} \theta_k(x) \in \mathcal{U}_{B,\epsilon}$, i.e. N is such that for all $x \in b$, for all $f \in B$, $|\sum_{k=N}^{\infty} \theta_k(x)(f)| = |\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)| < \epsilon$. But is is again a result of the Cauchy formula. Consider b' a closed absolutely convex bounded set of E containing b. Then $B(2b')$ is bounded in $\mathbb{C}$: $B(2b') \subseteq [-M; M]$ for some $M > 0$. Consider N such that $\sum_{k \geq N} \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{M}$. Then we have for all $x \in b$, for all $f \in B$, for all k, $|f_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}$, and $|\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)| \leq |\sum_{k=N}^{\infty} \frac{M}{2^k}| < \epsilon$. □

Lemma C.4.4. The series $\sum \theta_k$ is also what is called a Mackey convergent sequence : there is $\mathcal{B}$ a bounded set in $\mathcal{L}(E, !E)$ and a sequence of scalars $(\lambda_n)_n$ converging towards 0 such that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k - \delta\right) \in \lambda_n \mathcal{B}.$$

Proof. The proof is done exactly as above, using the Cauchy formula. Consider b and B two bounded closed absolutely convex sets in E and $S(E, \mathbb{C})$ respectively. Let us denote K for the absolutely convex closed closure of $B(2b)$. Then, by the Cauchy formula for power series, we have

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k(b)(B) - \delta(b)(B) \subseteq \left(\sum_{k>n} \frac{1}{\lambda^k}\right) K.$$

K being bounded, we have that for every b and B bounded in E and $S(E, \mathbb{C}$ respectively,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \theta_k(b)(B) - \delta(b)(B)}{\sum_{k>n} \frac{1}{\lambda^k}}$$

is bounded in $\mathbb{C}$. Hence

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \theta_k(b) - \delta(b)}{\sum_{k>n} \frac{1}{\lambda^k}}$$

is bounded in $!E$. Hence

$$\mathcal{B} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \theta_k - \delta}{\sum_{k>n} \frac{1}{\lambda^k}}$$

is a bounded set in $\mathcal{L}(E, !E)$, and we have our result. □

Theorem C.4.5. For every reflexive space E and F, we have

$$S(E,F) \simeq \mathcal{L}(!E,F).$$

This isomorphism comes from an adjunction between $! : Quant \to Lin$ and the oblivion functor $\mathbb{U} : Lin \to Quant$

Proof. Consider $f \in S(E,F)$. By C.3.38, we can know that every $z \in !E$ is a sum of $l \circ ev_x$, with $l \in \mathbb{C}^\times$ and $x \in E$. But $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$, so z is a sum of $\lambda.ev_x$. Define $\hat{f} : !E \to F$ by $\hat{f}(\sum \lambda_i ev_{x_i}) = \sum \lambda_i f(x_i)$. $\hat{f}$ is clearly linear. In order to show that it is bornological, consider B a bounded subset in $!E$. By definition of the topology on $S(E,\mathbb{C})$, B is a set of function sending every equibounded of $S(E,\mathbb{C})$ on a bounded set. Now consider $l \in F^\times$. Then $l(\hat{f}(B)) = B\{l \circ f\}$ which is bounded as the image by B of a singleton. $f(B)$ is scalarly bounded hence bounded by 2.6.

Now consider $g \in \mathcal{L}(!E,F)$ and define $\check{g} : E \to F$ by $\check{g}(x) = g(ev_x) = g \circ \delta$. g is not continuous in general, so despite its linearity we cannot conclude that $g(ev_x) = \sum g(\theta_k)$. Now is the time for using the lemma just above. Because g is bornological, we have for every $n \in \mathbb{N}$:

$$g \circ (\sum_{k=1}^{n} \theta_k - \delta) = \sum_{k=1}^{n} g \circ \theta_k - g \circ \delta \in \lambda_n g \circ (\mathcal{B}).$$

Now we see that $\sum\limits_{k=1}^{n} g \circ \theta_k$ Mackey converge towards $g \circ \delta$, and a few lines of immediate calculus show that the convergence is uniform on bounded sets of E. Then $\check{g} \in S(E,F)$, and we have our result.

It is straightforward that $\hat{\check{g}} = g$, $\check{\hat{f}} = f$, that $g \mapsto \check{g}$ and $f \mapsto \hat{f}$ are both linear and bornological, and this induce an isomorphism which natural in E and F. We have our adjunction.

□

Note that during the first part of the last demonstration, we have strongly used the fact that every form in $!E$ is the restriction of a sum of $\lambda ev_x \in \mathcal{L}(E,\mathbb{C})^\times$, with $\lambda \in \mathbb{C}$ and $x \in E$. This is exactly what proposition C.3.38 says.

The natural transformations associated to this adjunction are :

- The counit $d : !E \to E$ defined by the $d(\lambda ev_x) = \lambda x$ and then extended linearly.
- The unit : $\iota : E \to !E$, defined by $\iota(x) = \delta_x$.

For the comonad, ! comes then with d and the comultiplication $\rho : !E \to !!E$ defined on basis elements by $\rho(\lambda\delta_x) = \lambda\delta_{\delta_x}$. This endows the category *Lin* with a symmetric monoidal comonad. The preceding theorem shows that *Quant* is exactly the co-Kleisli category $Lin_!$.

This comonad induces a structure of bialgebra on every $!E$:

- $\Delta : !E \to !E \otimes !E$ is defined by $\Delta(\lambda ev_x) = \lambda ev_x \otimes ev_x$, then extended linearly.
- $e : !E \to \mathbb{C}$ is $e(\lambda ev_x) = \lambda$, and then extended linearly .
- $\triangledown : !E \otimes !E \to !E$ is $\triangledown(ev_x \otimes ev_y) = ev_{x+y}$.
- $\nu : \mathbb{C} \to !E$ is $\nu(1) = ev_0$.

All these morphisms are bornological linear maps. So as to have a model of Linear Logic, we just miss the Seely isomorphism.

Proposition C.4.6. Clearly, we have $1 = \mathbb{C} \simeq !(\top) = !\{0\}$ as $S(\{0\}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Theorem C.4.7. For every reflexive spaces E and F we have $!E \otimes !F \simeq !(E \times F)$.

Proof. This comes from the cartesian closedness of *Quant* and the monoidal closedness of *Lin*. Indeed,

$$\begin{aligned}
!(E \times F) &= S(E \times F, \mathbb{C})^{\times} \\
&\simeq S(E, S(F, \mathbb{C}))^{\times} \\
&\simeq \mathcal{L}(!E, \mathcal{L}(!F, \mathbb{C}))^{\times} \\
&\simeq \mathcal{L}(!E \otimes !F, \mathbb{C})^{\times} \\
&= (!E \otimes !F)^{\times\times} \\
&\simeq !E \otimes !F.
\end{aligned}$$

These intuitive equations may need a few justifications. The first line is just the definition of the exponential. Then, the second equality is possible because of the cartesian closedness of *Quant*. The third equality uses the adjunction we described in C.4.5 : we have $S(E, S(F, \mathbb{C}))^{\times} \simeq \mathcal{L}(!E, S(F, \mathbb{C}))^{\times}$ and $S(F, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}(!F, \mathbb{C})$. The last isomorphism is bornological, then they have the same bounded sets, and then $\mathcal{L}(!E, S(F, \mathbb{C}))$ and $\mathcal{L}(!E, \mathcal{L}(!F, \mathbb{C}))$ are pointwise equal and have the same bounded sets. We have the bornological isomorphism justifying the third line. The fourth line comes from the monoidal closedness of *Lin*, the fifth is just the definition of the dual of a space, and the last line comes from the reflexivity of $!E \otimes !F$. $\square$

This concludes our construction of our denotational model of Linear Logic. Note that this construction of the exponential is quite general. In fact, it is very similar to the construction done in complete spaces (see B) or in convenient spaces (see [BET10]). It would be interesting to know what is the computational meaning of these kind of exponentials. Is it a free exponential ?

Theorem C.4.8. The category *Lin*, equipped with the comonad !, is a model of Linear Logic.

C.5 A differential structure

We could have shown that *Quant* was a differential category (see [BCS06]), but because it enjoys reflexivity, let us show that is is a model of Differential Linear Logic (see 1), as described in [Ehr11] section 4.

C.5.1 Prerequisites

According to [Ehr11], a model of Differential linear logic is a Seely category, enriched over a unitary semi-ring k. To make it simple, let us say that k is a field, and the fact that our category $\mathcal{C}$ is enriched over k means that each Hom-set $\mathcal{C}(E,F)$ must be a vector space over k, and that the composition and the monoidal law $\otimes$ must be bilinear operations.

Let us recall the definition of a Seely category : a Seely category is a symmetric monoidal closed category $(\mathcal{L}, \otimes, 1)$ with binary product and a binary product denoted & and $\top$, endowed with :

- a comonad $(!, \rho, d)$.
- two natural isomorphism $m^2_{E,F} : !E \otimes !F \to !(E \,\&\, F)$ and $m_0 : 1 \to \top$ such that $(!, m) : (\mathcal{L}, \&, \top) \to (\mathcal{L}, \otimes, 1)$ is a symmetric monoidal functor.

Moreover, we ask the following diagram to commute for all $A, B \in \mathcal{L}$:

$$\begin{tikzcd}
!E \otimes !F \arrow[r, "m"] \arrow[dd, "\delta_E \otimes \delta_F"'] & !(E \,\&\, F) \arrow[d, "\delta_{!(e\&F)}"'] \\
 & !!(E \,\&\, F) \arrow[d, "!<!\pi_1, !\pi_2>"'] \\
!!E \otimes !!F \arrow[r, "m"] & !(!E \,\&\, !F)
\end{tikzcd}$$

In order to model DiLL, we only miss a deriving transformation, i.e something modelizing the co-dereliction rule in DiLL. We need a natural transformation $\overline{d}_E$:

$E \to !E$, such that $\overline{d}_E \circ d_E = Id_E$, and require a few commutation diagrams ensuring that the rules of differential calculus are verified (chain rule, etc.).

C.5.2 Quant as a model of DiLL

Of course, in our category, $\overline{d}_E$ is going to come from the derivation of a function in analysis. In fact, as we can see in Differential categories, $\overline{d}_E$ is the basic tool to compute the "differential" of the identity function Id_E, which then allows to compute the differential of every "smooth" arrow in the category. We have

$$D[1_{!E}] = \triangledown \circ (\overline{d}_E \otimes 1_{!E} : E \otimes !E \multimap !E$$

and if $f : !E \multimap F$,

$$D[f] : f \circ \overline{d}_E : E \otimes !E \multimap F$$

.

Consider then $x \in E$ when E is a topological vector space, and remember that you can define a differentiation on smooth (in the meaning of Kriegl and Michor) functions. As for every x and y, $t \in \mathbb{R} \mapsto x + ty$ is smooth, so is $t \mapsto f(x + ty)$. Then the derivative $D_x[f](y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(x+ty)}{t}$ exists, and it can be shown that D verifies all the rule expected of a differentiation, as the chain rule, or the nullity of the differentiate of a constant function (see [KM97], 3.18).

Then $\lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(x+ty)}{t} = f(\triangledown(\overline{d}_E(y), \delta_x)$. In particular $f(\overline{d}_E(y)) = D_0[f](y)$. As $coder_x$ is an element of $!E$, that is a linear form on $S(E, \mathbb{C})$, we have

$\overline{d}_e(y) : y \mapsto (f \mapsto D_0[f](y)$.

This is the same codereliction that can be found in [BET10] and [Gir99]. Now let us define $\overline{d}_E$ properly. As power series are holomorphic, they are smooth (see [KM97], 7.4.8), and we can indeed define for every $f \in S(E, \mathbb{C})$ the differential of f.

Definition C.5.1. The co-dereliction is the category of reflexive space is :

$$\overline{d}_E \begin{cases} E \to !E \\ y \mapsto f \in S(E, \mathbb{C}) \mapsto \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(ty) - f(0)}{t} \end{cases}$$

According to C.3.26,we have $\overline{d}_E(y) : f \mapsto f_1(y)$ when $f = \sum f_k$. Now it is clear that $\overline{d}_E(y)$ is indeed a bornological linear form on $S(E, \mathbb{C})$. Linearity is obvious, and when B is a bounded set of $S(E, \mathbb{C})$, $\overline{d}_E(y)(B)$ is also bounded by the Cauchy formula.