Modèles topologiques quantitatifs de la Logique Linéaire

Marie Kerjean

Septembre 2013

Stage de M2 réalisé sous la direction de Christine Tasson,
Laboratoire PPS, Université Paris Diderot
marie.kerjean@ens-lyon.fr

Contexte

Calcul		**Logique**		**Catégorie**
Terme	*Curry-Howard*	Preuve	*Sémantique catégorique*	Morphisme
Type		Formule		Espace
Évaluation		Normalisation		Égalité

Historique

Syntaxe

λ-calcul $\quad \lambda x : A.y : B$

Sémantique

Espaces cohérents

Historique

Syntaxe

λ-calcul $\quad \lambda x : A.y : B$

Sémantique

Linéarité

$f : A \multimap B$ linéaire

$g :!A \multimap B$ non-linéaire

Espaces cohérents

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Girard 88

Linéarité

Sémantique

Espaces cohérents

Logique Linéaire

Grammaire : $A, B ::= 1 | \bot | \top | 0 | A \parr B | A \otimes B | A \oplus B | A \& B | !A | ?A$

Catégorie cartésienne fermée :
Fonctions non-linéaires
$!A \multimap B$, $\&$, $\oplus$

Espaces

Catégorie monoïdale close :
$!$
Fonctions linéaires
$\mathcal{U}$
$A \multimap B$, $\otimes$, $\parr$

$!$ est un foncteur monoïdale et $\mathcal{U}$ est le foncteur oubli.

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique quantitative

Sémantique

Espaces cohérents

Sémantique quantitative

Analogie sémantique avec l'algèbre linéaire :

- Programme P_1 linéaire : n'utilisant qu'une fois sa ressource
- Programme P_n n-linéaire : utilisant n fois sa ressource

Dans le calcul : gestion des ressources d'un programme.

Un programme P s'écrit comme une disjonction de programmes n-linéaires.

$$P = \sum P_n$$

On cherche donc à écrire nos fonctions non-linéaires en séries entières :

$$!A \multimap B = S(A, B)$$

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique quantitative

Sémantique

Espaces cohérents

Modèle Relationnel
Espace de Köthe
Espaces de finitude
Ehrhard 05

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique

Espaces cohérents

Sémantique quantitative

Espaces de finitude

Différentiation

Différentiation en Logique

En Analyse : $f : A \to B$ et si $x \in A$ $Df(x) : A \to B$ est linéaire.

En logique linéaire : si $f : !A \multimap B$, alors $Df : !A \multimap (A \multimap B)$.

Groupe exponentiel de DiLL

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, !A, !A}{\vdash \Gamma, !A} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, !A} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A}$$

Sémantique

Modèle de DiLL $=$ Modèle de LL $+$ opérateur différentiel

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Sémantique

Espaces cohérents

Linéarité

Sémantique quantitative

Espaces de finitude

Logique Linéaire Différentielle
Ehrhard Regnier 03

λ-calcul différentiel

Différentiation

Historique

Syntaxe

λ-calcul

Logique Linéaire

Sémantique

Espaces cohérents

Linéarité

Sémantique quantitative

Logique Linéaire Différentielle

Espaces de finitude

λ-calcul différentiel

Différentiation

Espaces convenants : Blute, Ehrhard, Tasson 2010

Espaces convenants

1988 et 1997 : Frölicher, Kriegl et Michor proposent une catégorie cartésienne close dont les flèches sont des fonctions lisses.

En 2010 : R.Blute, T. Ehrhard et C. Tasson y voient un modèle de ILL (et une catégorie différentielle).

$$\begin{tikzcd} \text{Lisses} \arrow[rr, bend left, "!"'] & \text{Espaces convenants} & \text{Linéaires} \arrow[ll, bend left, "\mathcal{U}"'] \end{tikzcd}$$

Espaces convenants

1988 et 1997 : Frölicher, Kriegl et Michor proposent une catégorie cartésienne close dont les flèches sont des fonctions lisses.

En 2010 : R.Blute, T. Ehrhard et C. Tasson y voient un modèle de ILL (et une catégorie différentielle).

$$
\begin{tikzcd}
\text{Fonctions envoyant une courbe lisse sur une courbe lisse} \arrow[rr, bend left] & \text{Espaces convenants} & \text{Fonctions linéaires bornologiques} \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Syntaxe

Sémantique

λ-calcul

Linéarité

Espaces cohérents

Logique Linéaire

Sémantique quantitative

Espaces de finitude

Logique Linéaire Différentielle

Différentiation

Espaces convenants

Logique classique
$A^{\perp\perp} \simeq A$

$(E \multimap \perp) \multimap \perp \simeq 1$

Résultat : un modèle quantitatif de DiLL

Linéarité

Algèbre Linéaire

Différentielle

Analyse

Espaces vectoriels complexes topologiques réflexifs

Séries entières

Sémantique quantitative

Réflexivité

Logique classique

Résultat : un modèle quantitatif de DiLL

Linéarité

Algèbre Linéaire

Différentielle

Analyse

Espaces vectoriels
complexes topologiques
réflexifs

Séries entières

Sémantique quantitative

Réflexivité

Logique classique

Résultat : un modèle quantitatif de DiLL

Linéarité → Algèbre Linéaire

Différentielle → Analyse

Espaces vectoriels complexes topologiques réflexifs

Sémantique quantitative → Séries entières

Logique classique → Réflexivité

Résultat : un modèle quantitatif de DiLL

Linéarité $\downarrow$ Algèbre Linéaire

Différentielle $\downarrow$ Analyse

Espaces vectoriels
complexes topologiques
réflexifs

Séries entières

Sémantique quantitative

Réflexivité

Logique classique

Résultat : un modèle quantitatif de DiLL

Linéarité

Algèbre Linéaire

Différentielle

Analyse

Espaces vectoriels
complexes topologiques
réflexifs

Séries entières

Sémantique quantitative

Réflexivité

Logique classique

Résultat

Quant :
$S(E,F)$, &, $\oplus$

$!$

Espaces réflexifs

$\mathcal{U}$

Lin :
$\mathcal{L}(E,F)$, $\otimes$, $\parr$

$$!E = S(E,\mathcal{C})^\times$$
$$\bar{d}_E : E \rightarrow !E$$

Theorème

Lin et *Quant* forment un modèle de *DiLL*.

Remarque

Résoud le problème des espaces cohérents de Banach (Girard 99)

Nos objets

... sont avant tout des espaces vectoriels topologiques complexes.

A partir d'une base de voisinage de 0, on défini les bornés : B est borné *ssi* pour tout voisinage U de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $B \subseteq \lambda U$.

On considère des fonctions linéaires bornologique : $l : E \multimap F$ envoie un borné de E sur un borné de F.

Réflexivité

- On veut interpréter $(A \multimap \perp) \multimap \perp \simeq A$
- $A \multimap \ldots$ sera interprété par un espace de fonctions linéaires
- $\otimes$ sera interprété par le produit tensoriel

$E \multimap \perp$ est interprété par $E^\times$, le dual bornologique de E.

Définition

On travaille donc avec des espaces réflexifs : tels que $E^{\times\times} \simeq E$.
On appelle *Lin* la catégorie des espaces refléxifs et des fonctions linéaires bornologiques.

Une catégorie monoïdale close

Définitions

$E \otimes F$ est le produit tensoriel de E et F, muni d'une topologie ayant comme bornés les $B_E \otimes B_F$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des fonctions linéaires bornologiques entre E et F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E.

Théorème

Lin est monoïdale close.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est réflexif lorsque E et F le sont.
- $\mathcal{L}(E \otimes G, F) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(G, F))$.

Séries entières

Espaces réflexifs

!Fonctions linéaires bornologiques, $\otimes$, $⅋$, 1

$\mathcal{U}$

Programmes quantifiés

Nos programmes quelconques vont être interprété par des séries entières :

$$P = \sum P_n \rightsquigarrow f = \sum f_n$$

- $f_n : E \to F$ est une fonction n-linéaire symmétrique, et bornologique.
- $f = \sum_{n \geqslant 1} f_n$ est la somme convergente uniforménte sur les bornés de E des f_n

Programmes quantifiés

Nos programmes quelconques vont être interprété par des séries entières :

$$P = \sum P_n \rightsquigarrow f = \sum f_n$$

- $f_n : E \to F$ est une fonction n-linéaire symmétrique, et bornologique.
- $f = \sum_{n \geqslant 1} f_n$ est la somme convergente uniformént sur les bornés de E des f_n

$S(E, F)$ est l'espace des séries entières entre E et F, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Une catégorie cartésienne close

On appelle *Quant* la catégorie des espaces réflexifs et des séries entières entre eux.

$E \times F$ est le produit cartésien de E et F, muni de la topologie produit.

Théorème

Quant est une catégorie cartésienne close.

- $S(F, G)$ est réflexif quand F et G le sont.
- $S(E \times F, G) \simeq S(E, S(F, G))$.

Séries entières, &, $\oplus$

$!$

Espaces réflexifs

$\mathcal{U}$

Fonctions linéaires bornologiques

Rappel : on veut $S(E,F) \simeq \mathcal{L}(!E,F)$

L'exponentielle

Définition

$!E = S(E, \mathbb{C})^\times$

On remarque que $ev : E \to S(E, \mathbb{C})^\times$ est une série entière : cela nous permet d'avoir le théorème suivant.

Théorème

Pour E et F des espaces réflexifs, on a : $S(E, F) \simeq \mathcal{L}(!E, F)$

Une catégorie différentielle

Nous avons juste besoin de modéliser la règle de co-déréliction :

$$. \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A}$$

Co-déréliction

$$\overline{d}_E \begin{cases} E \to !E \\ y \mapsto f \in S(E, \mathbb{C}) \mapsto \lim_{x \to 0} \dfrac{f(ty) - f(0)}{t} \end{cases}$$

Conclusion

Lin et *Quant* forment un modèle de *DiLL*. C'est le premier modèle de *DiLL* dont les objets sont des objets courants de l'analyse fonctionnelle.

Perspectives

- Peut-on comprendre mieux le contenu logique de la différentielle ?
- A-t-on un opérateur d'itération ? Un point-fixe pour *certaines* fonctions ?
- Quelle est l'interprétation calculatoire de l'intégration ?
- Solutions aux équations différentielles dans la logique linéaire ?

Quelques techniques

Pourquoi des bornés ?

Parce que un sous-ensemble de E est borné *ssi* pour tout $l \in E^\times$, $l(B)$ est borné dans $\mathcal{C}$.

Pourquoi une catégorie monoïdale close ?

Parce que en réécrivant Hahn-Banach pour des semi-normes bornologiques, on obtient que toute forme de $\mathcal{L}(E, F)^\times$ s'écrit comme une somme de $f \circ ev_x$ avec $x \in E$ et $f \in F^\times$.

Pourquoi une catégorie cartésienne close ?

Parce que on peut montrer que nos séries entières envoient une courbe holomorphe sur une courbe holomorphe, et en utilisant le théorème de Fubini.