

Modèles topologiques quantitatifs de la Logique Linéaire

Marie Kerjean

Septembre 2013

Stage de M2 réalisé sous la direction de Christine Tasson,
Laboratoire PPS, Université Paris Diderot
marie.kerjean@ens-lyon.fr

Contexte

Calcul

Terme

Curry-Howard

Type

Évaluation

Logique

Preuve

Formule

Normalisation

*Sémantique
catégorique*

Catégorie

Morphisme

Espace

Égalité

Historique

Syntaxe

λ -calcul $\lambda x : A. y : B$

Sémantique

Espaces cohérents

Historique

Syntaxe

λ -calcul $\lambda x : A. y : B$

Linéarité

$f : A \multimap B$ linéaire

$g : !A \multimap B$ non-linéaire

Sémantique

Espaces cohérents

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Girard 88

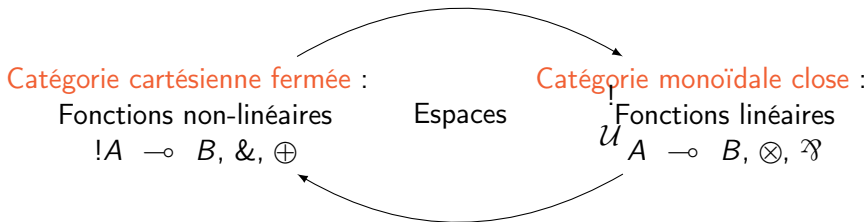
Linéarité

Sémantique

Espaces cohérents

Logique Linéaire

Grammaire : $A, B ::= 1 \mid \perp \mid \top \mid 0 \mid A \wp B \mid A \otimes B \mid A \oplus B \mid A \& B \mid !A \mid ?A$



$!$ est un foncteur monoïdale et \mathcal{U} est le foncteur oublé.

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique
quantitative

Sémantique

Espaces cohérents

Sémantique quantitative

Analogie sémantique avec l'algèbre linéaire :

- Programme P_1 linéaire : n'utilisant qu'une fois sa ressource
- Programme P_n n-linéaire : utilisant n fois sa ressource

Dans le calcul : gestion des ressources d'un programme.

Un programme P s'écrit comme une disjonction de programmes n -linéaires.

$$P = \sum P_n$$

On cherche donc à écrire nos fonctions non-linéaires en séries entières :

$$!A \multimap B = S(A, B)$$

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique
quantitative

Sémantique

Espaces cohérents

Modèle Relationnel
Espace de Köthe
Espaces de finitude
Ehrhard 05

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Linéarité

Sémantique
quantitative

Différentiation

Sémantique

Espaces cohérents

Espaces de finitude

Différentiation en Logique

En Analyse : $f : A \rightarrow B$
et si $x \in A$ $Df(x) : A \rightarrow B$
est linéaire.

En logique linéaire : si
 $f : !A \multimap B$, alors
 $Df : !A \multimap (A \multimap B)$.

Groupe exponentiel de DiLL

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, !A, !A}{\vdash \Gamma, !A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, !A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A}$$

Sémantique

Modèle de DiLL = Modèle de LL + opérateur différentiel

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Logique Linéaire

Différentielle

Ehrhard Regnier 03

λ -calcul différentiel

Linéarité

Sémantique
quantitative

Différentiation

Sémantique

Espaces cohérents

Espaces de finitude

Historique

Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Logique Linéaire
Différentielle

λ -calcul différentiel

Linéarité

Sémantique
quantitative

Différentiation

Sémantique

Espaces cohérents

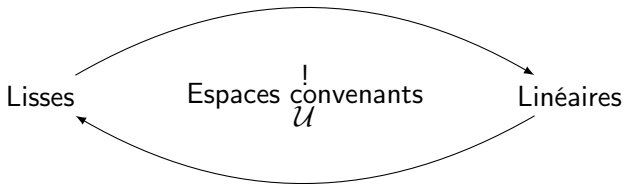
Espaces de finitude

Espaces convenants :
Blute, Ehrhard,
Tasson 2010

Espaces convenants

1988 et 1997 : Frölicher, Kriegl et Michor proposent une catégorie cartésienne close dont les flèches sont des fonctions lisses.

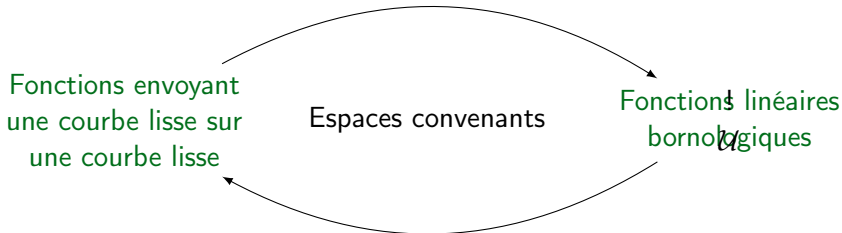
En 2010 : R.Blute, T. Ehrhard et C. Tasson y voient un modèle de ILL (et une catégorie différentielle).



Espaces convenants

1988 et 1997 : Frölicher, Kriegl et Michor proposent une catégorie cartésienne close dont les flèches sont des fonctions lisses.

En 2010 : R.Blute, T. Ehrhard et C. Tasson y voient un modèle de ILL (et une catégorie différentielle).



Syntaxe

λ -calcul

Logique Linéaire

Logique Linéaire
Différentielle

Logique classique

$$A^{\perp\perp} \simeq A$$

Linéarité

Sémantique
quantitative

Différentiation

Sémantique

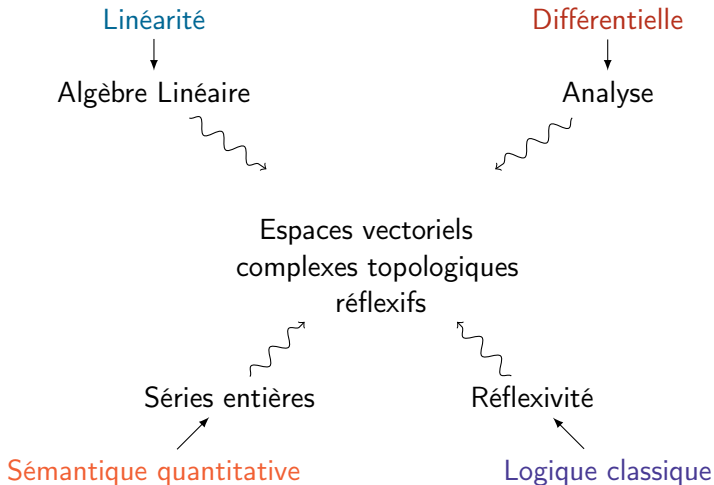
Espaces cohérents

Espaces de finitude

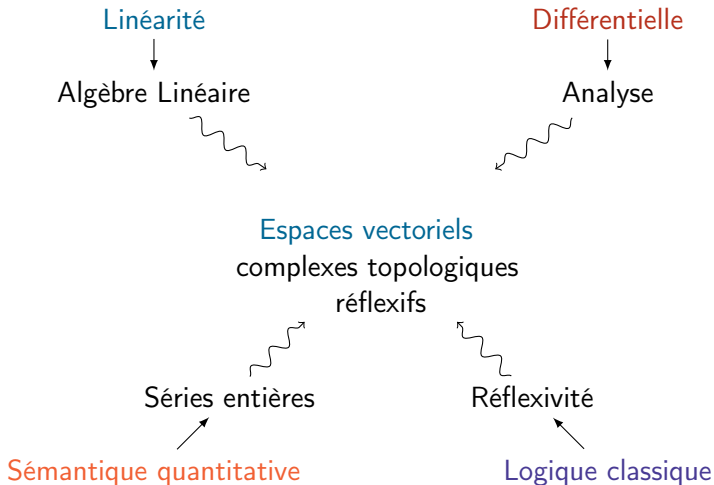
Espaces convenants

$$(E \multimap \perp) \multimap \perp \simeq 1$$

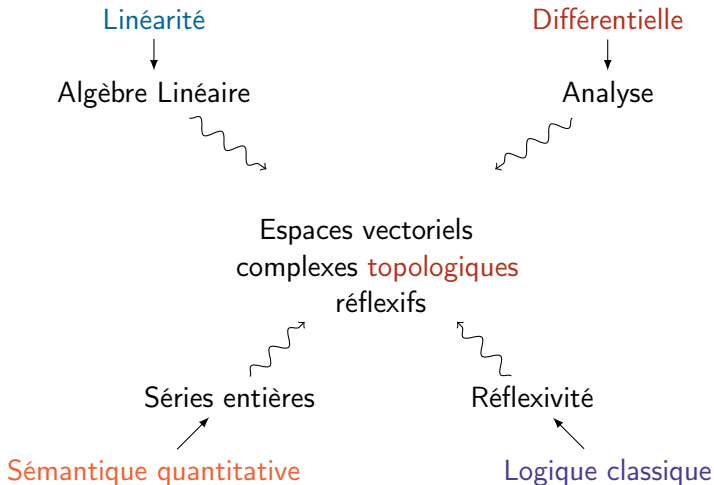
Résultat : un modèle quantitatif de DiLL



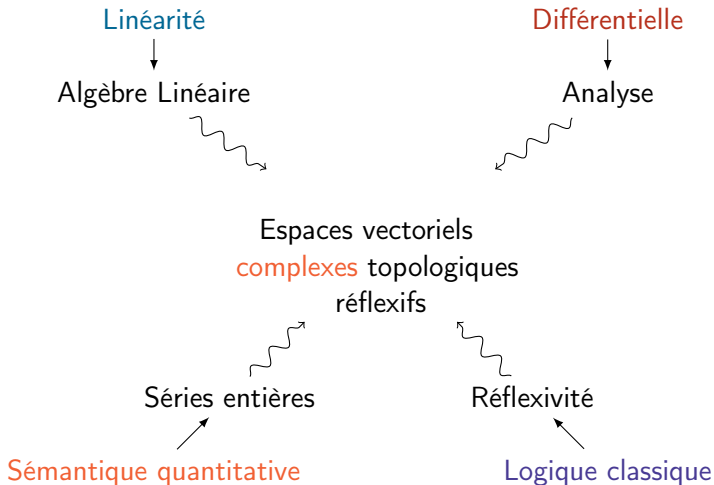
Résultat : un modèle quantitatif de DiLL



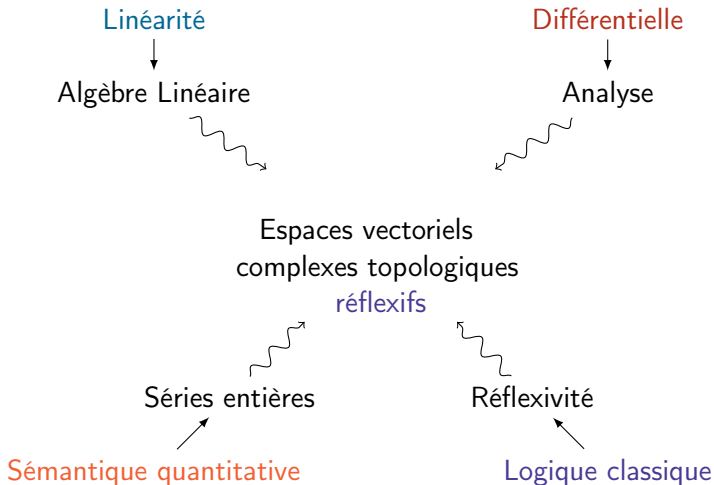
Résultat : un modèle quantitatif de DiLL



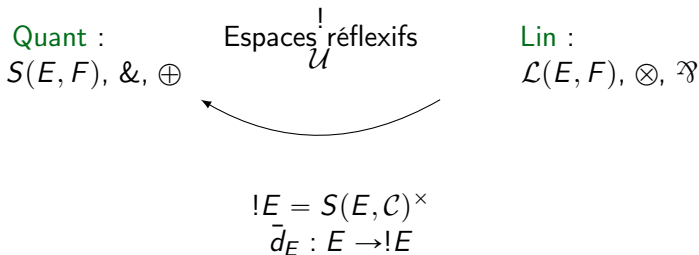
Résultat : un modèle quantitatif de DiLL



Résultat : un modèle quantitatif de DiLL



Résultat



Theorème

Lin et *Quant* forment un modèle de *DiLL*.

Remarque

Résoud le problème des espaces cohérents de Banach (Girard 99)

Nos objets

... sont avant tout des **espaces vectoriels topologiques complexes**.

A partir d'une base de voisinage de 0, on définit les **bornés** : B est borné ssi pour tout voisinage U de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $B \subseteq \lambda U$.

On considère des fonctions linéaires **bornologique** : $l : E \rightarrow F$ envoie un borné de E sur un borné de F .

Réflexivité

- On veut interpréter $(A \multimap \perp) \multimap \perp \simeq A$
- $A \multimap \dots$ sera interprété par un espace de fonctions linéaires
- \otimes sera interprété par le produit tensoriel

$E \multimap \perp$ est interprété par E^\times , le **dual bornologique** de E .

Définition

On travaille donc avec des espaces **réflexifs** : tels que $E^{\times\times} \simeq E$.
On appelle *Lin* la catégorie des espaces réflexifs et des fonctions linéaires bornologiques.

Une catégorie monoïdale close

Définitions

$E \otimes F$ est le produit tensoriel de E et F , muni d'une topologie ayant comme bornés les $B_E \otimes B_F$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace des fonctions linéaires bornologiques entre E et F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E .

Théorème

Lin est monoïdale close.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est réflexif lorsque E et F le sont.
- $\mathcal{L}(E \otimes G, F) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(G, F))$.

Séries entières

Espaces réflexifs

!Fonctions linéaires
bornologiques, \otimes , \mathcal{A} , 1

Programmes quantifiés

Nos programmes quelconques vont être interprétés par des séries entières :

$$P = \sum P_n \rightsquigarrow f = \sum f_n$$

- $f_n : E \rightarrow F$ est une fonction n -linéaire symétrique, et bornologique.
- $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ est la somme convergente uniformément sur les bornés de E des f_n

Programmes quantifiés

Nos programmes quelconques vont être interprétés par des séries entières :

$$P = \sum P_n \rightsquigarrow f = \sum f_n$$

- $f_n : E \rightarrow F$ est une fonction n -linéaire symétrique, et bornologique.
- $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ est la somme convergente uniformément sur les bornés de E des f_n

$S(E, F)$ est l'espace des séries entières entre E et F , muni de la topologie de la convergence uniforme.

Une catégorie cartésienne close

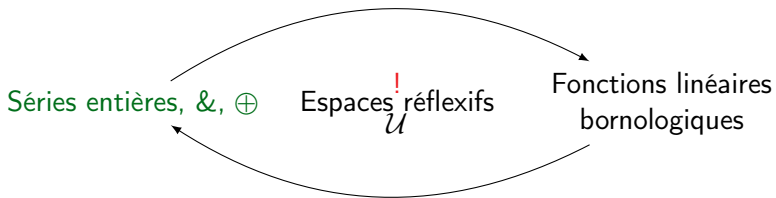
On appelle *Quant* la catégorie des espaces réflexifs et des séries entières entre eux.

$E \times F$ est le produit cartésien de E et F , muni de la topologie produit.

Théorème

Quant est une catégorie cartésienne close.

- $S(F, G)$ est réflexif quand F et G le sont.
- $S(E \times F, G) \simeq S(E, S(F, G))$.



Rappel : on veut $S(E, F) \simeq \mathcal{L}(!E, F)$

L'exponentielle

Définition

$$!E = S(E, \mathbb{C})^\times$$

On remarque que $ev : E \rightarrow S(E, \mathbb{C})^\times$ est une série entière : cela nous permet d'avoir le théorème suivant.

Théorème

Pour E et F des espaces réflexifs, on a : $S(E, F) \simeq \mathcal{L}(!E, F)$

Une catégorie différentielle

Nous avons juste besoin de modéliser la règle de co-déréliction :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, !A}$$

Co-déréliction

$$\bar{d}_E \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow !E \\ y \mapsto f \in S(E, \mathbb{C}) \mapsto \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(tx) - f(0)}{t} \end{array} \right.$$

Conclusion

Lin et *Quant* forment un modèle de *DiLL*. C'est le premier modèle de *DiLL* dont les objets sont des objets courants de l'analyse fonctionnelle.

Perspectives

- Peut-on comprendre mieux le contenu logique de la différentielle ?
- A-t-on un opérateur d'itération ? Un point-fixe pour *certaines* fonctions ?
- Quelle est l'interprétation calculatoire de l'intégration ?
- Solutions aux équations différentielles dans la logique linéaire ?

Quelques techniques

Pourquoi des bornés ?

Parce que un sous-ensemble de E est borné ssi pour tout $l \in E^\times$, $l(B)$ est borné dans \mathcal{C} .

Pourquoi une catégorie monoïdale close ?

Parce que en réécrivant Hahn-Banach pour des semi-normes bornologiques, on obtient que toute forme de $\mathcal{L}(E, F)^\times$ s'écrit comme une somme de $f \circ ev_x$ avec $x \in E$ et $f \in F^\times$.

Pourquoi une catégorie cartésienne close ?

Parce que on peut montrer que nos séries entières envoient une courbe holomorphe sur une courbe holomorphe, et en utilisant le théorème de Fubini.