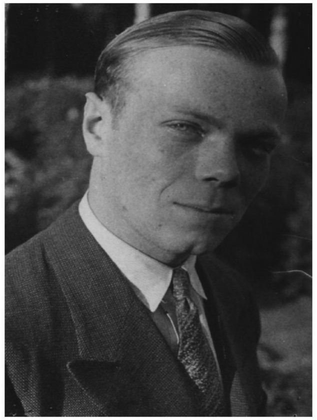
Vers la complétude de la résolution dans le calcul des prédicats

Jacques Herbrand



Mathématicien et logicien français (1908 - 1931)

Vers la complétude de la résolution

Soit $\Sigma = \Sigma_F \cup \Sigma_P$ une signature telle que Σ_F contient au moins une constante.

Définition :

- L'univers d'Herbrand de Σ est l'ensemble des termes clos sur Σ.
- La base d'Herbrand est l'ensemble d'atomes clos sur Σ.
- Une interprétation de Herbrand de la signature Σ est une interprétation $\mathcal{I}_H = \langle \mathcal{D}_H, I_H \rangle$ t.q.
  - Son domaine $\mathcal{D}_H$ est l'univers d'Herbrand
  - Pour chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n, $I_H(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
  - Pour chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n, on se donne un sous-ensemble $\mathcal{S}_p$ de la base de Herbrand t.q. $I_H(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_p$.

Note: L'univers d'Herbrand n'est pas vide.

Lemmes pour le Théorème de Herbrand

Lemme : Soit t un terme dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation. Soit σ una valuation quelconque, soit τ la substitution $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n \in \mathcal{D}$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors on a $[t]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Lemme : Soit G une formule dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation. Soit σ una valuation quelconque, soit τ la substitution $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n \in \mathcal{D}$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Exercice : Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1 \leftarrow a, x_2 \leftarrow s(a)\}$. Soit $\mathcal{I}(r)(n, m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $\mathcal{I}(a) = 0$ et $\mathcal{I}(s)(n) = n + 1$. Vérifier le résultat du lemme précédent.

Théorème de Herbrand

Théorème : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ admet un modèle ssi il existe une interprétation $\mathcal{I}_H$ de Herbrand t.q. $\mathcal{I}_H$ est un modèle de $\mathcal{C}$.

Preuve : $\Leftarrow$) Si il existe une interprétation de Herbrand qui est un modèle de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ admet un modèle.
$\Rightarrow$) Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses qui admet un modèle. Alors il existe une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ qui est un modèle de $\mathcal{C}$. On montre qu'il existe une interprétation $\mathcal{I}_H = \langle \mathcal{D}_H, I_H \rangle$ de Herbrand qui est un modèle de $\mathcal{C}$.
En effet, pour chaque symbole de prédicat p d'arité n, on construit l'ensemble $I_H(p)$ comme suit :

$$I_H(p) = \begin{array}{l} \{(t_1, \ldots, t_n) \mid (t_1, \ldots, t_n) \text{ sont clos et} \\ \mathcal{I} \text{ est un modèle de la formule } p(t_1, \ldots, t_n)\} \end{array}$$

Nous avons donc:

$\mathcal{I}$ est un modèle de $p(t_1, \ldots, t_n)$ implique $\mathcal{I}_H$ est un modèle de $p(t_1, \ldots, t_n)$

Preuve du théorème de Herbrand

Soit une clause quelconque $E = \forall x_1 \ldots \forall x_n (A_1 \vee \ldots \vee A_k)$ de l'ensemble des clauses $\mathcal{C}$ où chaque A_i est un littéral. Supposons $\mathcal{I}$ est un modèle de E. On veut montrer que $\mathcal{I}_H$ est un modèle de E.
Par hypothèse $[E]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ (pour toute valuation σ dans $\mathcal{D}$)
ssi
(1) $\Pi_{a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{D}}[(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=a_1]\ldots[x_n:=a_n]} = \mathbf{V}$
Soient $t_1, \ldots, t_n$ une suite arbitraire de termes clos (cette suite existe car l'univers de Herbrand n'est pas vide). Soient $d_i = [t_i]_{\mathcal{I},\sigma}$ (donc $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D}$)
(1) implique en particulier
(2) $[(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$
qui implique qu'il existe i t.q.
$[A_i]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$
ssi (lemme avec $\tau = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$)
(3) $[\tau(A_i)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$

Preuve du théorème de Herbrand

(3) $[\tau(A_i)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$
ssi
$\mathcal{I}$ est un modèle de $\tau(A_i)$
implique (def. Herbrand)
$\mathcal{I}_H$ est un modèle de $\tau(A_i)$
ssi
$[\tau(A_i)]_{\mathcal{I}_H,\rho} = \mathbf{V}$ (pour toute valuation ρ dans $\mathcal{D}_H$)
implique
$[\tau(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I}_H,\rho} = \mathbf{V}$
ssi (lemme, où $[t_i]_{\mathcal{I}_H,\rho} = t_i$)
$[A_1 \vee \ldots \vee A_k]_{\mathcal{I}_H,\rho[x_1:=t_1]\ldots[x_n:=t_n]} = \mathbf{V}$
implique (les t_i sont arbitraires)
$[\forall x_1 \ldots \forall x_n (A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I}_H,\rho} = \mathbf{V}$
ssi
$[E]_{\mathcal{I}_H,\rho} = \mathbf{V}$
ssi $\mathcal{I}_H$ est un modèle de E

Arbres sémantiques complets

Définition : Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une énumération de tous les atomes clos d'une signature Σ. L'arbre sémantique complet associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

- la racine est B_0
- chaque nœud B_i possède un arc gauche $\mathbf{V}$ et un arc droit $\mathbf{F}$
- tous les successeurs de B_i sont étiquetés par B_{i+1}

Exercice :

1. Construire un arbre sémantique complet A_1 pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construire un arbre sémantique complet A_2 pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \ldots$.

Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un nœud n de l'arbre A est dit nœud d'échec pour $\mathcal{C}$ si

- le segment de la branche qui va de la racine de A jusqu'à n suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de $\mathcal{C}$, et
- aucun prédécesseur de n n'est un nœud d'échec de A.

Exercice : Identifier dans les arbres A_1 et A_2 au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \vee q(x), q(a), r(a)\}$.

Exercice : Si `False` $\in \mathcal{C}$, qu'est-ce qu'on peut dire sur les nœuds d'échec pour $\mathcal{C}$?

Arbres sémantiques partiels

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ est un arbre obtenu à partir de A en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

Définition : Un arbre sémantique partiel A est clos si

- A est fini, et
- toute feuille de A est un nœud d'échec.

Exercice : Construire un arbre sémantique partiel clos associé à $\mathcal{C} = \{\neg r(x) \vee q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.

Corollaire du théorème de Herbrand

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait $\mathcal{C}$ ssi il existe un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Corollaire : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ n'a pas de modèle ssi il existe un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Complétude de la résolution

Théorème : La résolution est complète pour la réfutation, i.e. si Δ n'a pas de modèle, alors $\Delta \vdash_R$ `False`.

Preuve : En utilisant le corollaire précédent et le fait que chaque arbre sémantique partiel clos permet de construire une réfutation (construction subtile).